

量子アニーリングの 研究開発最前線

田中 宗

早稲田大学高等研究所

科学技術振興機構 戦略的創造研究推進事業 さきがけ
「量子の状態制御と機能化」領域 研究者



WIAS

QUANTUM
ANNEALING



MACHINE
LEARNING



本日の話題

量子アニーリングは、何に使えるのか？

量子アニーリングとは、何か？

量子アニーリングの過去、現在、未来

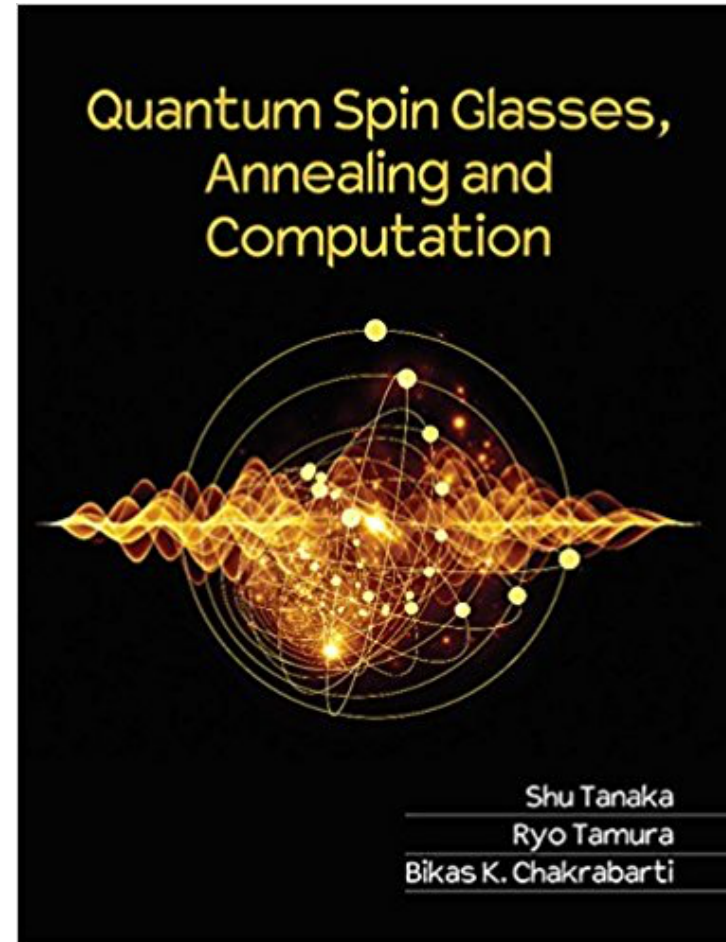
参考文献・記事

分かりやすい日本語書籍



西森秀稔、大関真之『量子コンピュータが人工知能を加速する』(日経BP)

英語教科書を執筆しました。



Shu Tanaka, Ryo Tamura, and Bikas K. Chakrabarti, "Quantum Spin Glasses, Annealing and Computation" (Cambridge University Press, 2017)

参考文献・記事

ZDNet Japan 編集部からのお知らせ

- [PR]AWS×ZDNet/TechRepublic Japan
- ZDNet編集部によるテーマ記事

TechRepublic Japan

学ぼう!企業IT製品

普段目にしないことが多い企業IT製品。抽象的な説明ではわかったよ

CIO	クラウド	モバイルPC	セキュリティ	ソフトウェア
マーケティング	ビッグデータ	キャリア	オフトピック	事例

ZDNet Japan > 経営 > 量子アニーリング理論の可能性

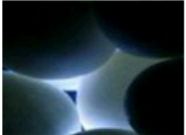
量子アニーリング理論の可能性

いいね! ツイート G+ B! Pocket

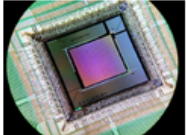
PR | テレワークの時代に対応-厳格かつ柔軟なセキュリティ設定とは?

PR | “おまけ”だと思っていると痛い目を見る! どう見直す? 「DHCP/DNSサーバー」

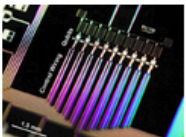
PR | 無駄を省いてコスト削減-「第三者保守」で攻めのIT投資を実現



「日本産量子コンピュータ」の勝算-量子アニーリング理論の可能性 (4)



Googleやリクルートが取り組む理由-量子アニーリング理論の可能性 (3)



「日本のアイデアを海外がさらっていく」現状-量子アニーリング理論の可能性 (2)



「1億倍速いコンピュータ」に利用-量子アニーリング理論の可能性 (1)



大学院生・研究者のキャリアマガジン

アカリク VOL. 008

TAKE FREE

量子アニーリングで繋がる大学院と企業

量子アニーリングによるデータ分析手法の開発を目的とした共同研究について、株式会社リクルートコミュニケーションズ 棚橋 耕太郎氏と早稲田大学高等研究所准教授である田中 宗氏にインタビューを行いました。量子アニーリングの技術に関わるお話や、大学院生へのメッセージも語っていただきました。

早稲田大学高等研究所 准教授
JSTさきがけ研究者(兼任)
田中 宗氏

1981年生まれ 東京都出身
東京工業大学理学部卒業、東京大学大学院理学系研究科物理学専攻修士課程修了、同博士課程修了
2008年、博士(理学、東京大学)取得
その後、東京大学、近畿大学、京都大学を経て現職

株式会社リクルートコミュニケーションズ エンジニア
棚橋 耕太郎氏

1988年生まれ 大阪府出身
京都大学工学研究科高分子化学専攻修士課程修了

https://acarc.co.jp/news/2017/06/freepaper_08/

https://japan.zdnet.com/cio/sp_16annealing/

参考文献・記事

ZDNet Japan > 経営



開発競争が過熱--「量子コンピュータ」の国際会議で日本企業は何を語ったか

田中宗 2017年08月24日 07時00分

いいね! 260

ツイート

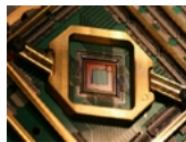
G+

B! 19

Pocket

108

ZDNet Japan > 経営



「どうやって動くか知らなくていい」--リクルートが注力する“量子コンピュータ”研究

究

田中宗 2017年06月06日 07時00分

いいね! 136

ツイート

G+

B! 2

Pocket

読まれている記事

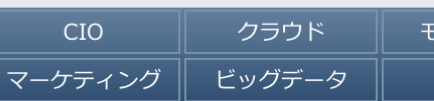
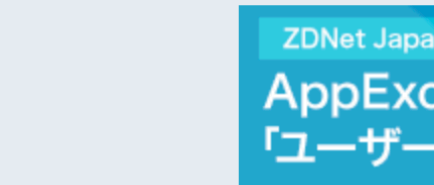
総合

クラウド

セキュリティ

モバイル

- 1 「どうやって動くか知らなくていい」--リクルートが注力する“量子コンピュータ”研究
- 2 日本オラクルがトップ人事--ドイツ法人から新CEO
- 3 デモ中に不正な通信--つながるセキュリティがInteropでとらえたリアルな攻撃
- 4 量子コンピュータで広告配信を最適化する--リクルートが研究に本腰
- 5 WannaCryに暗号化されたファイル、大半は復元ソフトで回復可能--カスペルスキー



ZDNet Japan > 経営



量子コンピュータで広告配信を最適化する--リクルートが研究に本腰

田中宗 2017年06月05日 07時00分

いいね! 346

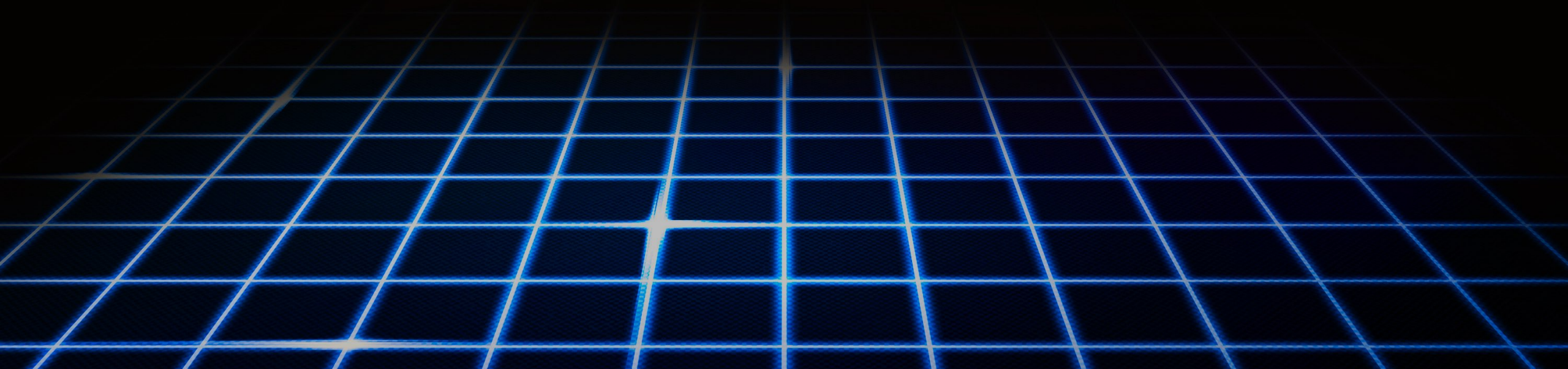
ツイート

G+

B! 15

Pocket 62

量子アニーリングは、何に使えるのか？



量子アニーリングの想定応用領域

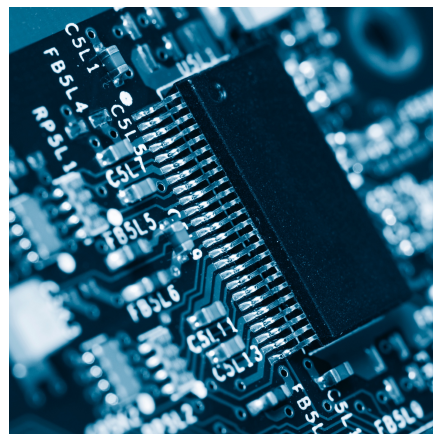
組合せ最適化問題への定式化可能な、多様な場面における利用が期待されている



巡回セールスマン問題



シフト計画



集積回路設計



経営戦略立案



農業



工業



商業



情報

組合せ最適化処理の困難

膨大な選択肢から、ベストな選択肢を探索する問題。解の候補数が爆発的に増加。

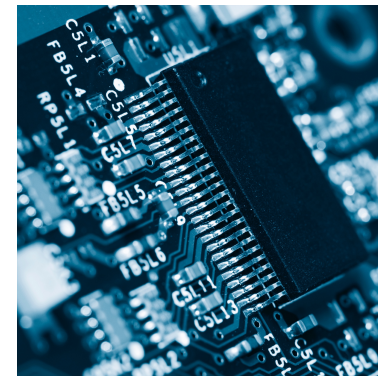
答えのパターン数
計算時間・消費エネルギー

組合せ爆発

**高速化技術の
開発が必須**

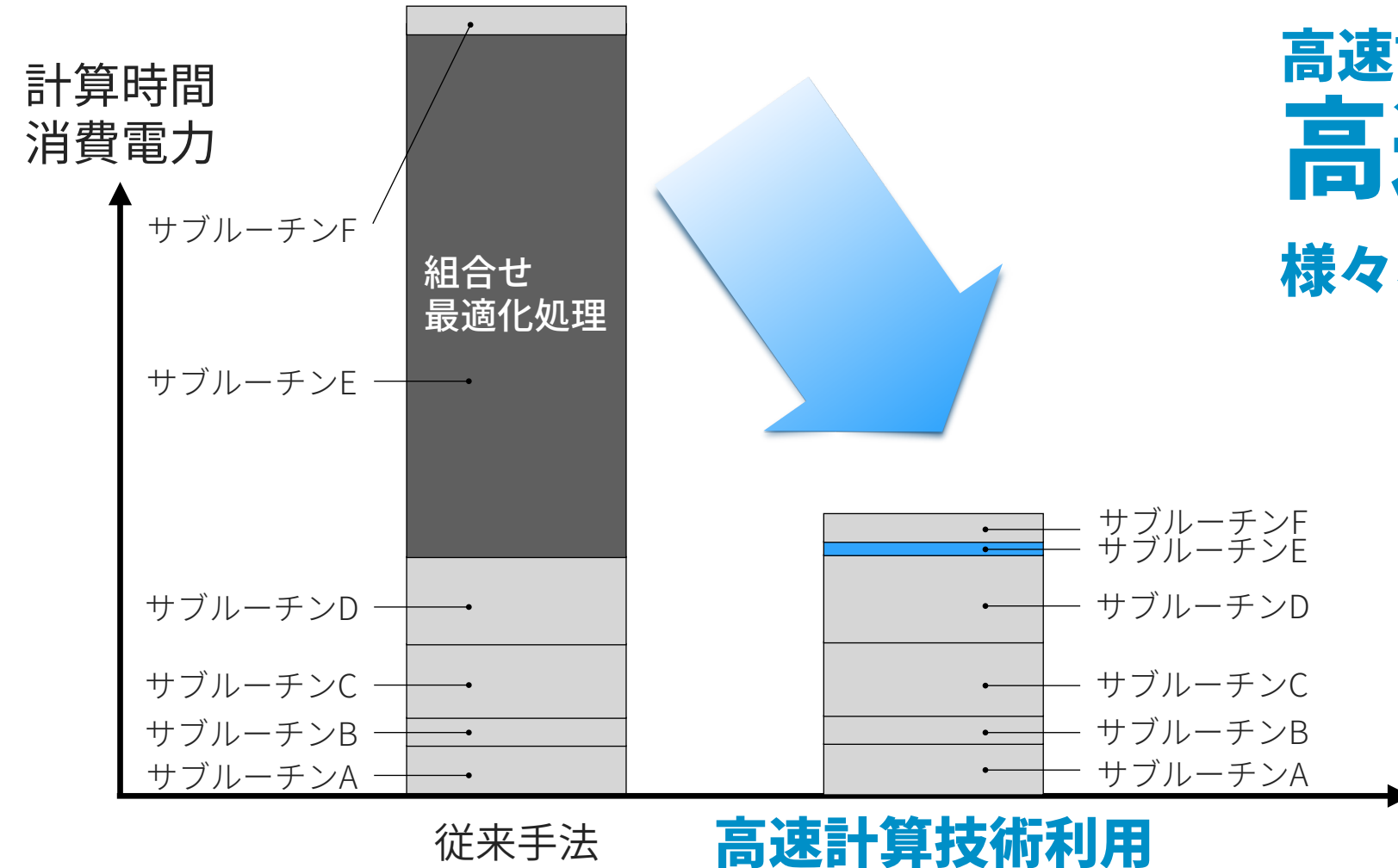
問題のサイズ

様々な業種における課題解決に資する計算
技術の開発は強く望まれている



組合せ最適化処理を高速化する意義

組合せ最適化処理が大きなボトルネックとなっている問題に有効



高速計算技術利用による
高速化・省エネ化
様々な分野の発展スピードが向上





最適効率配送ルート探索

ガソリンスタンド出店計画

車載機器の機械学習処理

道路埋込機器の機械学習処理

組合せ最適化問題は膨大

分類	現在～2020年	2020年～2030年	2030年以降
認識能力関係	- 静止画像・動画からの一般物体認識が人間レベルに到達 3次元情報からの環境認識が人間レベルに到達 - 人間の表情、感情の認識が人間レベルに到達	- 原始的シンボルグラウンディング問題の解決を背景に、特定ドメインにおいて、文脈や背景知識を考慮した認識が可能に - スモールデータでの学習による認識が可能に	特定ドメインに限らず、一般ドメインにおいて、文化や社会的背景などを考慮した認識が可能に（シンボルグラウンディング問題の解決）
運動能力関係	- ディープラーニング（DL）と強化学習の融合が進化し、人間が設定した報酬体系の下、高度なゲームなどのタスクの遂行（プランニング）が人間レベルに到達 - 運動に関するプリミティブ、構造（オントロジー）を自動生成する技術の確立	- スモールデータでの学習により、深い背景知識を必要とするタスクの遂行が人間レベルに到達 - 人間の運動・モノの操作・動画画像から概念階層を自動で獲得（運動からの自動的なオントロジー獲得技術の確立）	文化や社会的背景を必要とするタスクの遂行が人間レベルに到達
	- DL＋強化学習の進化により、剛体物マニピュレーション制御のほか、柔軟物マニピュレーション制御を学習 - 自律移動しながら3Dマップを生成し、周辺環境を構造化 - 不整地等非構造化環境におけるロコモーション技術が確立	- 安全マニピュレーション技術の確立 - ハードの進化とあわせて、さまざまな実用的タスクに対するマニピュレーション技術が確立 - 安全ロコモーション技術の確立 - ハードの進化とあわせて、さまざまな実用的タスクに対するロコモーション技術が確立	- マニピュレーション機能がモジュール化され、社会全体で最適化 - 移動ロボットの活用が促進
言語・意味理解	- 画像とテキストを相互変換する原始的シンボルグラウンディング技術の確立 - 特定ドメインにおいて、会話が成立するための発話計画を自動で生成	- マルチモーダルな情報、運動に関するプリミティブとテキストを相互変換する、より本格的なシンボルグラウンディング技術の確立 - 原始的シンボルグラウンディング問題の解決を背景に、新聞等のフォーマルなテキストの分類、情報検索、含意関係認識等が人間レベルに到達 - 原始的シンボルグラウンディング問題の解決を背景に、特定ドメインの機械翻訳が人間レベルに到達	- 人の能力の向上 - フォールバックの活用 - 機械翻訳の活用 - 音声認識の活用
数値データの処理、人間やシステムのモデル化	- センサからの大量データの取得・活用が進む（IoT） - 認知発達モデル、脳の情報処理の研究が加速	- センサデータにより、社会の部分的最適化が可能に - 認知発達モデルが部分的に構築 - 脳の情報処理原理が部分的に解明	- 認識能力、運動能力、言語・意味理解能力の向上とあわせて、社会全体の最適化が可能に - 認知発達モデルが概ね構築 - 脳の情報処理原理が概ね解明
計算機システム等に必要なハードウェア	- ワンショット3D計測やハイバースペクトルカメラなどのセンサ - 省電力高性能小型プロセッサ - 触覚センサなどセンサ類の高度化 - 高度マニピュレータ	- イジングモデル型デバイス - スマートアクチュエータ - あらゆるデバイスが超低消費電力駆動	人の脳にせまる脳型デバイス

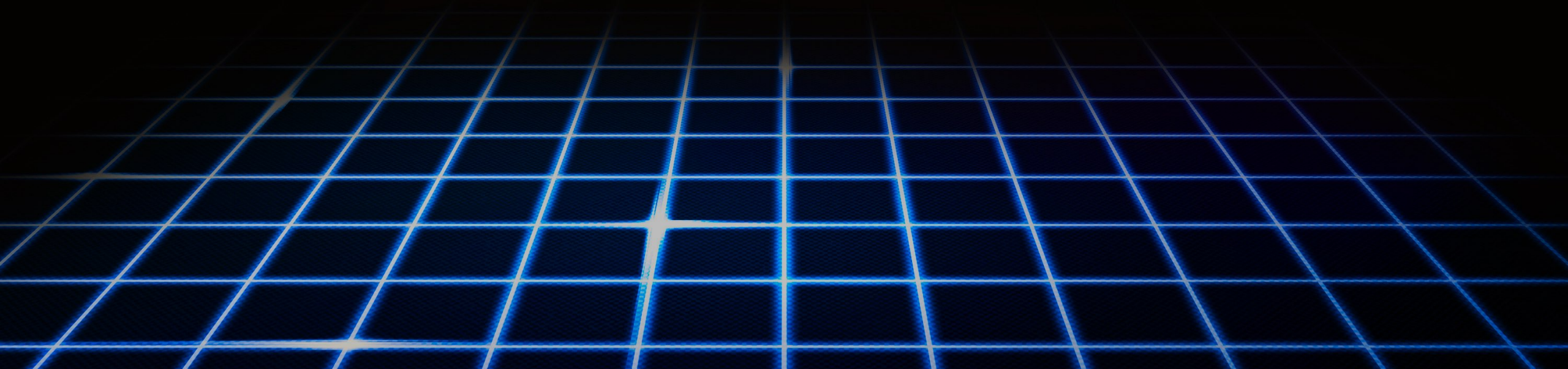
• 脳の情報処理原理が部分的に解明

• イジングモデル型デバイス

• スマートアクチュエータ

• あらゆるデバイスが超低消費電力駆動

量子アニーリングとは、何か？



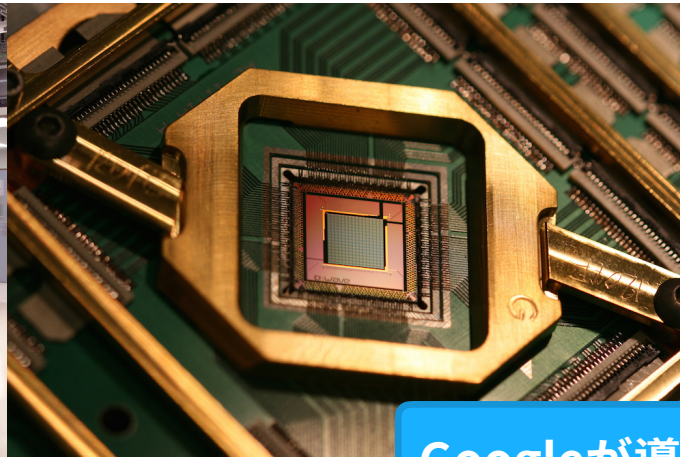
最先端量子情報処理技術 量子アニーリング

日本の超伝導エレクトロニクス分野の技術の結晶

Y. Nakamura, Y. A. Pashkin, and J. S. Tsai, Nature **398**, 786 (1999).
M. Hosoya, W. Hioe, J. Casas, R. Kamikawai, Y. Harada, Y. Wada, H. Nakane,
R. Suda, and E. Goto, IEEE Trans. on Appl. Supercond. **1**, 77 (1991).



D-Wave Systems webサイトより



Googleが導入

東工大の門脇・西森
による理論的提案

世界初商用量子ア
ニーリングマシン
(D-Wave Systems)

「1億倍速い計算」
(Google)

2048
ビット

1152
ビット

512ビット

128ビット

1998年

2011年

2013年

2015年

2017年

量子アニーリング実装の手順とキーワード

解くべき組合せ最適化問題を用意



イジングモデル(2値変数2次形式)で表現

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z \quad \sigma_i^z = \pm 1$$

量子アニーリングマシンによる自然計算



D-Wave Systems
webサイトより

測定により解が得られる



統計力学理論

組合せ最適化問題における
膨大なデータ処理の
理論基盤



量子並列性

量子重ね合わせ状態を
初期状態とした情報処理



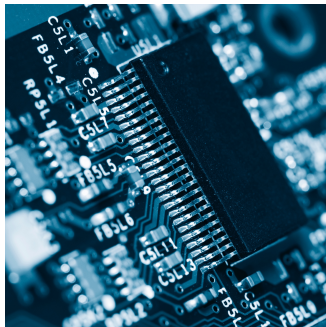
自然計算

自然現象を用いた計算

物理学を基礎とする 計算技術

組合せ最適化問題とイジングモデル

組合せ最適化問題の最適解 = イジングモデルの基底状態



イジングモデル

$$\mathcal{H} = - \underbrace{\sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{\text{スピン(ビット)間相互作用}} - \underbrace{\sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z}_{\text{磁場(強制力)}}$$

スピン(ビット)間
相互作用

磁場(強制力)

$$\sigma_i^z = \pm 1$$



様々な分野に、応用展開可能
イジングモデルの基底状態ソルバー開発が重要

イジングモデル

膨大な個数の要素間の相互作用により駆動される現象を取り扱う
最もシンプルな**統計力学模型**

$$\mathcal{H} = - \underbrace{\sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{\text{スピン間の相互作用}} - \underbrace{\sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z}_{\text{スピンに働く磁場}}$$

ハミルトニアン
スピンの状態に
応じたエネルギー

スピン変数
 $\sigma_i^z = \pm 1$  

組合せ最適化問題におけるコスト関数
各選択肢に応じた実数値



磁石はなぜくっつくか？

組合せ最適化問題の最適解 = イジングモデルの基底状態

内部エネルギーが最も小さくなる状態

イジングモデル

$$\mathcal{H} = - \underbrace{\sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{\text{スピン間の相互作用}} - \underbrace{\sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z}_{\text{スピンに働く磁場}}$$

$$\sigma_i^z = \pm 1 \quad \uparrow \downarrow$$

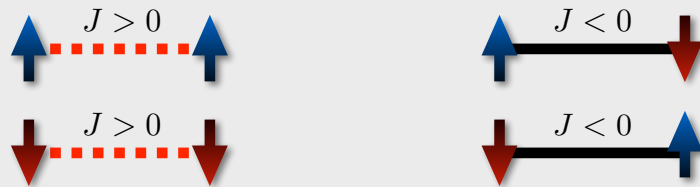
$J_{ij} > 0$: 強磁性的相互作用
隣り合うスピンの向きが一致したがる

$J_{ij} < 0$: 反強磁性的相互作用
隣り合うスピンの向きが反対に一致したがる

$h_i > 0$: $\sigma_i^z = +1$ になりたがる

$h_i < 0$: $\sigma_i^z = -1$ になりたがる

相互作用によるエネルギー利得



磁場によるエネルギー利得



組合せ最適化問題の最適解 = イジングモデルの基底状態

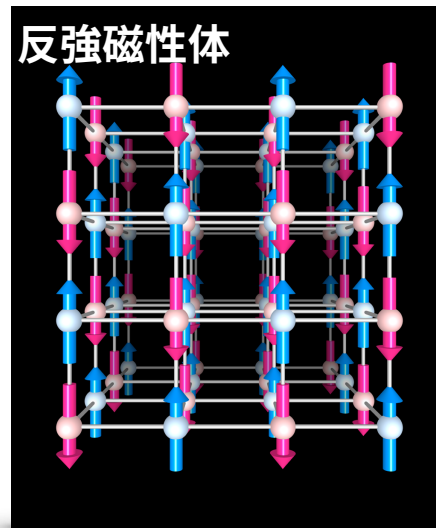
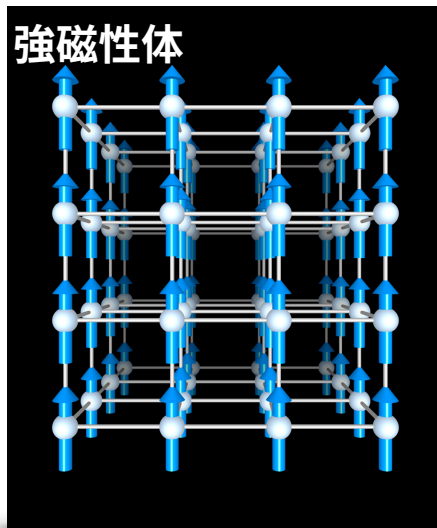
内部エネルギーが最も小さくなる状態

イジングモデル

基底状態(最もエネルギーが低い、安定状態)を求めたい

$$\mathcal{H} = - \underbrace{\sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{\text{スピン間の相互作用}} - \underbrace{\sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z}_{\text{スピンに働く磁場}}$$

$$\sigma_i^z = \pm 1 \quad \uparrow \downarrow$$



組合せ最適化問題の最適解 = イジングモデルの基底状態

内部エネルギーが最も小さくなる状態

イジングモデル

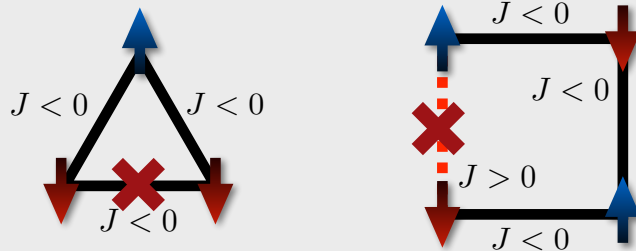
フラストレーション(競合)により、問題が難しくなる

$$\mathcal{H} = - \underbrace{\sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{\text{スピン間の相互作用}} - \underbrace{\sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z}_{\text{スピンに働く磁場}}$$

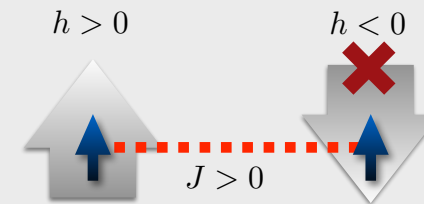
$$\sigma_i^z = \pm 1 \quad \uparrow \downarrow$$

端から順に解を構成しても、
最適解には到達しない

相互作用の競合(フラストレーション)



磁場の競合(フラストレーション)



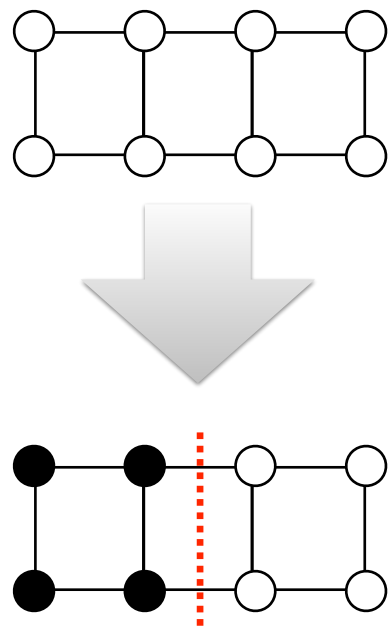
組合せ最適化問題の最適解 = イジングモデルの基底状態

内部エネルギーが最も小さくなる状態

グラフ分割問題

- 無向グラフ $G=(V,E)$ が与えられている。頂点数 $N=|V|$ は偶数。
- それぞれの頂点数を $N/2$ ずつにする分割のうち、カットされる辺が最小のものを求めよ。

例)



この問題は、下のハミルトニアンで表現できる。

$$\mathcal{H} = \underbrace{\sum_{(uv) \in E} \frac{1 - \sigma_u^z \sigma_v^z}{2}}_{\text{カットされる辺の本数}} + \gamma \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \sigma_i^z \right)^2}_{\text{それぞれの頂点数を } N/2 \text{ ずつにするような相互作用(制約式)}}$$

巡回セールスマン問題の定式化

より詳細には、共同研究を進めているNextremerやブレインパッドの方々による
下記の解説が参考になります。

Nextremer Advent Calendar 2016 | 23日目

量子アニーリングで組合せ最適化

量子アニーリング 1

最適化 157

Python 10565

量子コンピュータ 14

ML 機械学習 2048

ab_t

2017年02月03日に更新

12

これはNextremer Advent Calendarの23日目の記事です。

現在、株式会社Nextremerでは早稲田大学の田中宗様と量子アニーリングに関する共同研究を行っております。

http://qiita.com/ab_t/items/8d52096ad0f578aa2224

2017-04

20

物理のいない量子アニーリング入門

技術エントリー

分析エントリー

こんにちは、A.I.開発部の太田です。

今回は量子アニーリングの簡単なシミュレータを作ってみたり、実際のD-Waveを使ってみた経験から、物理を専門としない人向けに量子アニーリングについて解説しようと思います。
(シミュレータのコードはgithubで公開しています。私自身、量子アニーリングについては最近勉強し始めたところなので、色々ご指摘いただけると幸いです。)

さて、私の所属する部署の役割として、機械学習・人工知能関連の技術調査や社内への展開を行っており、その一環として昨年12月に早稲田大学の田中先生をお呼びして開催した量子アニーリング勉強会が社内で大変好評でした。

プロフィール



株式会社ブレインパッド

カテゴリ

- 分析エントリー (27)
- 技術エントリー (17)
- ブレインパッドの製品紹介 (16)
- デジタルマーケティング (12)
- ソーシャルリスニング (7)
- ブレインパッドの日常 (20)

<http://blog.brainpad.co.jp/entry/2017/04/20/160000>

量子アニーリング実装の手順とキーワード

解くべき組合せ最適化問題を用意



イジングモデル(2値変数2次形式)で表現

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z \quad \sigma_i^z = \pm 1$$

量子アニーリングマシンによる自然計算



D-Wave Systems
webサイトより

測定により解が得られる



統計力学理論

組合せ最適化問題における
膨大なデータ処理の
理論基盤



量子並列性

量子重ね合わせ状態を
初期状態とした情報処理

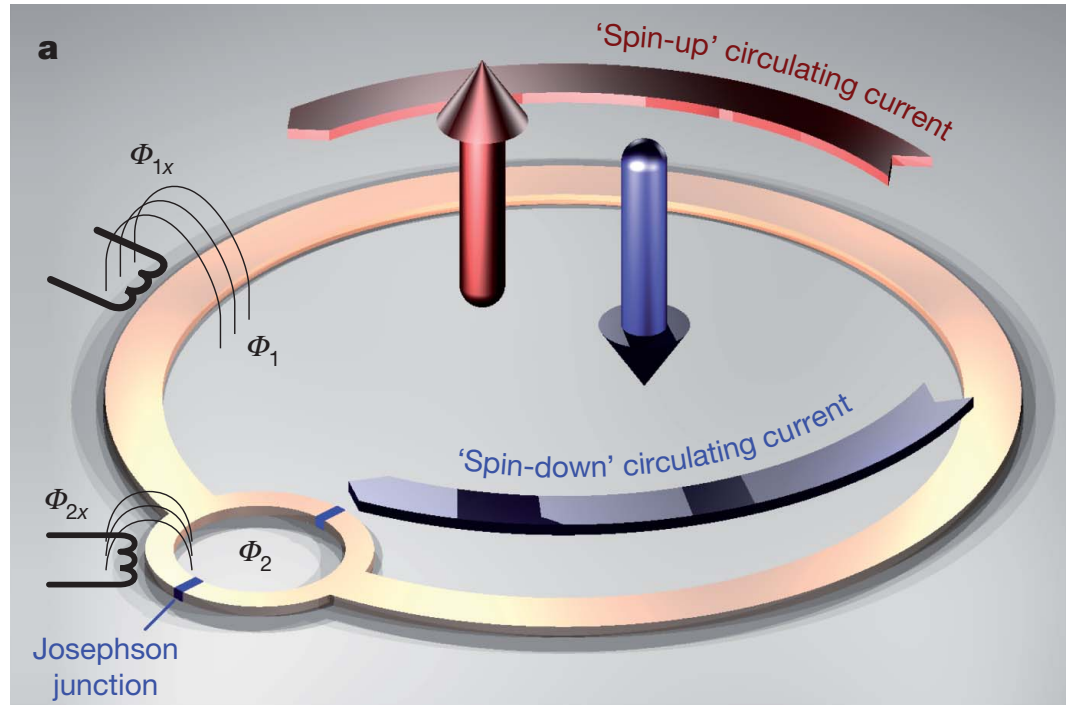


自然計算

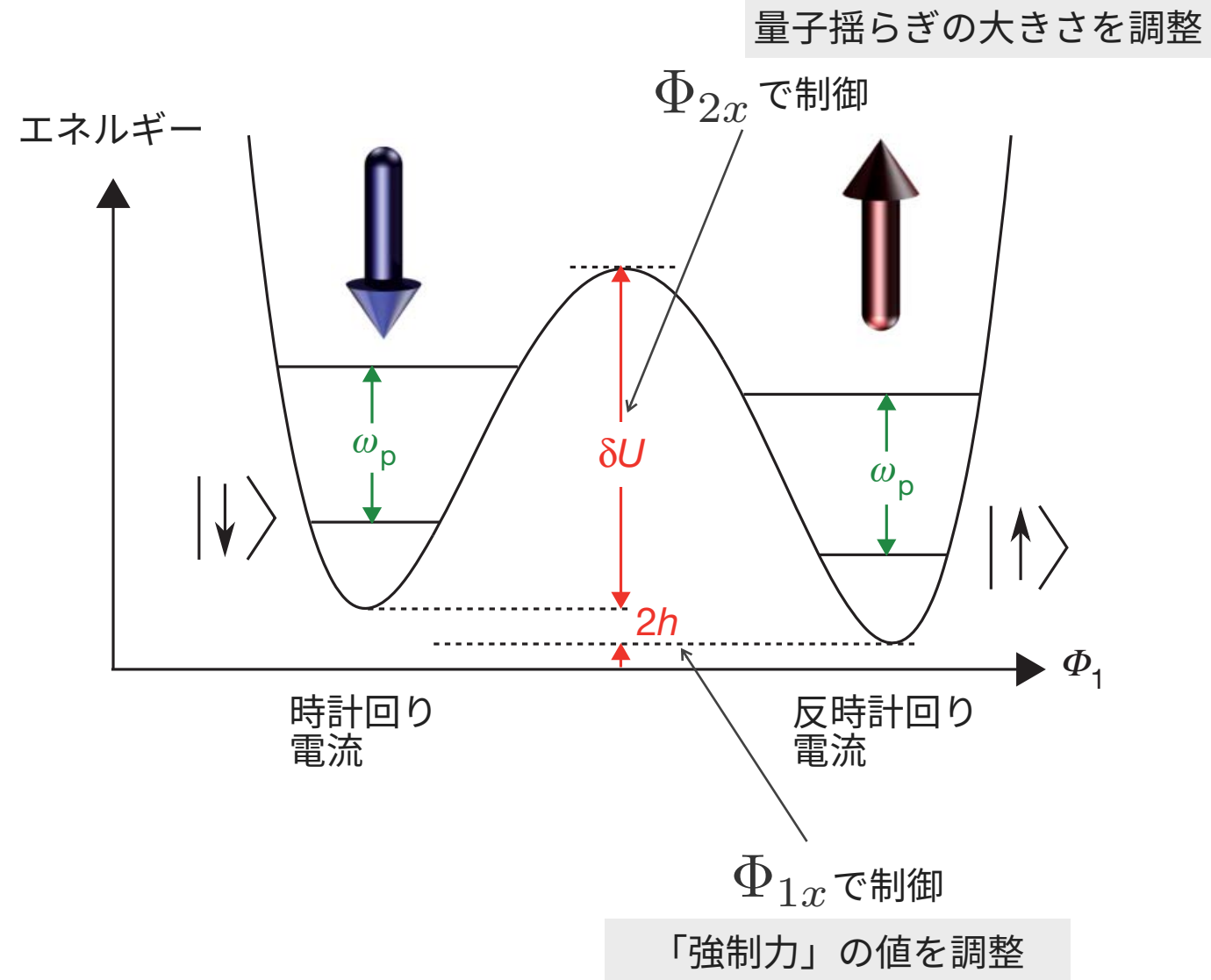
自然現象を用いた計算

物理学を基礎とする 計算技術

D-Waveの超伝導量子ビット



時計回り電流と反時計回り電流の重ね合わせ状態



M. W. Johnson et al. Nature Vol. **473**, 194 (2011)

量子ゆらぎの導入

非可換行列を用いて、量子ゆらぎを導入

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z$$

$$\sigma_i^z = \pm 1 \quad \uparrow \downarrow$$



パウリ行列による表現

$$\hat{\mathcal{H}} = - \sum_{(ij) \in E} J_{ij} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z - \sum_{i \in V} h_i \hat{\sigma}_i^z$$

$$\hat{\sigma}_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$2^N \times 2^N$ の対角行列

Kronecker直積を省略した書き方

基底

$$\hat{\sigma}_i^z |\uparrow\rangle = + |\uparrow\rangle$$

$$\hat{\sigma}_i^z |\downarrow\rangle = - |\downarrow\rangle$$

量子ゆらぎの導入

非可換行列を用いて、量子ゆらぎを導入

$$\hat{\mathcal{H}}_q = - \sum_i \hat{\sigma}_i^x$$

スピン反転(ビット反転)
量子力学的遷移

$$\hat{\sigma}_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_i^x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

$$\hat{\sigma}_i^x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$$

$\hat{\sigma}_i^x$ の固有状態

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle), \quad |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

量子力学的重ね合わせ状態の実現

量子ゆらぎの導入

非可換行列を用いて、量子ゆらぎを導入

$$\hat{\mathcal{H}}_q = - \sum_i \hat{\sigma}_i^x$$

スピン反転(ビット反転)
量子力学的遷移

$$\hat{\sigma}_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_i^x |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$$

$$\hat{\sigma}_i^x |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$$

$\hat{\mathcal{H}}_q$ の固有状態 $|\rightarrow\rightarrow\cdots\rightarrow\rangle$

$$2 \text{ スピンの場合: } |\rightarrow\rightarrow\rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$$

量子力学的重ね合わせ状態の実現

量子アニーリング実装の手順とキーワード

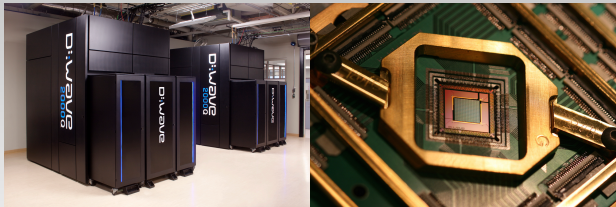
解くべき組合せ最適化問題を用意



イジングモデル(2値変数2次形式)で表現

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z \quad \sigma_i^z = \pm 1$$

量子アニーリングマシンによる自然計算



D-Wave Systems
webサイトより

測定により解が得られる



統計力学理論

組合せ最適化問題における
膨大なデータ処理の
理論基盤



量子並列性

量子重ね合わせ状態を
初期状態とした情報処理



自然計算

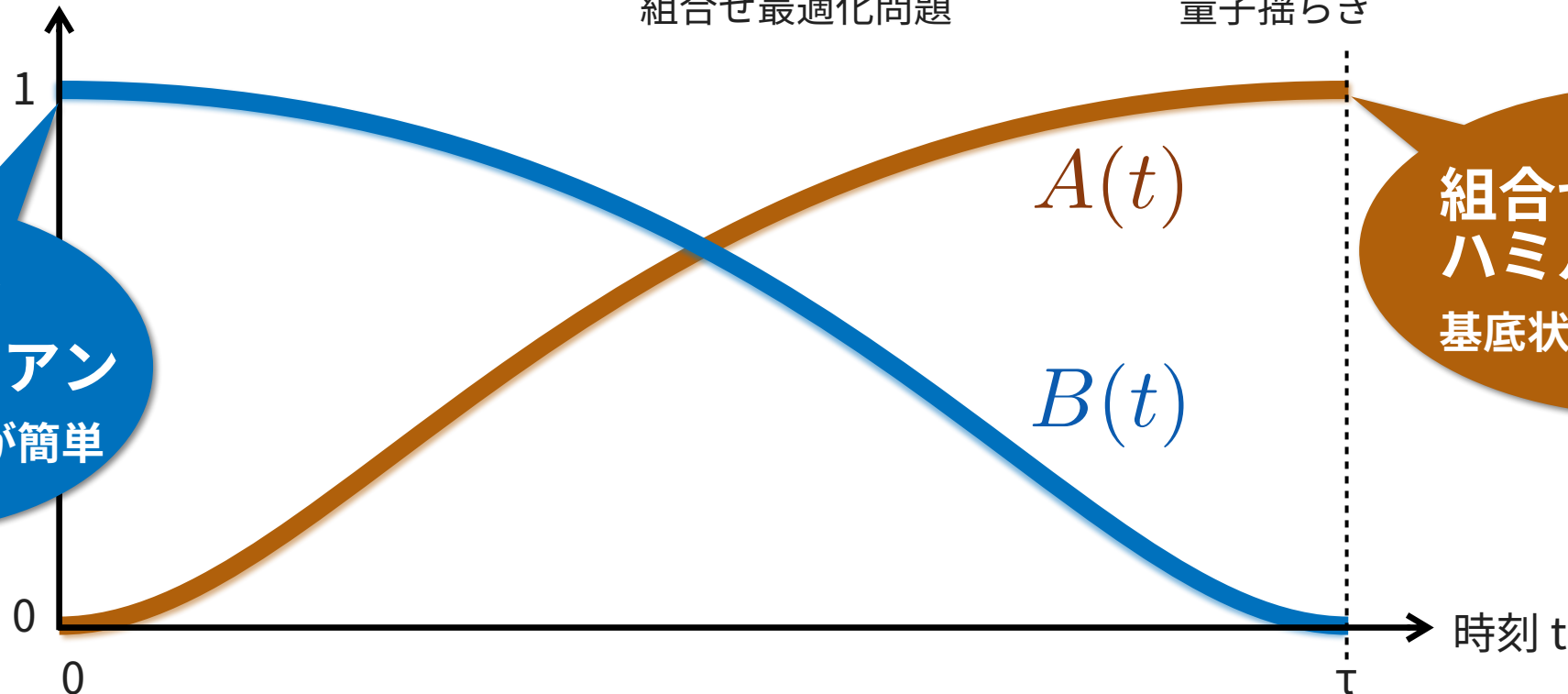
自然現象を用いた計算

物理学を基礎とする 計算技術

量子アニーリング実現の方法

基底状態が簡単に用意できる状態から、探索困難な基底状態への道筋を作る

$$\mathcal{H}(t) = \underbrace{A(t)\mathcal{H}_{\text{opt.}}}_{\text{組合せ最適化問題}} + \underbrace{B(t)\mathcal{H}_q}_{\text{量子揺らぎ}}$$



量子揺らぎ
ハミルトニアン
基底状態準備が簡単

組合せ最適化問題
ハミルトニアン
基底状態探索困難



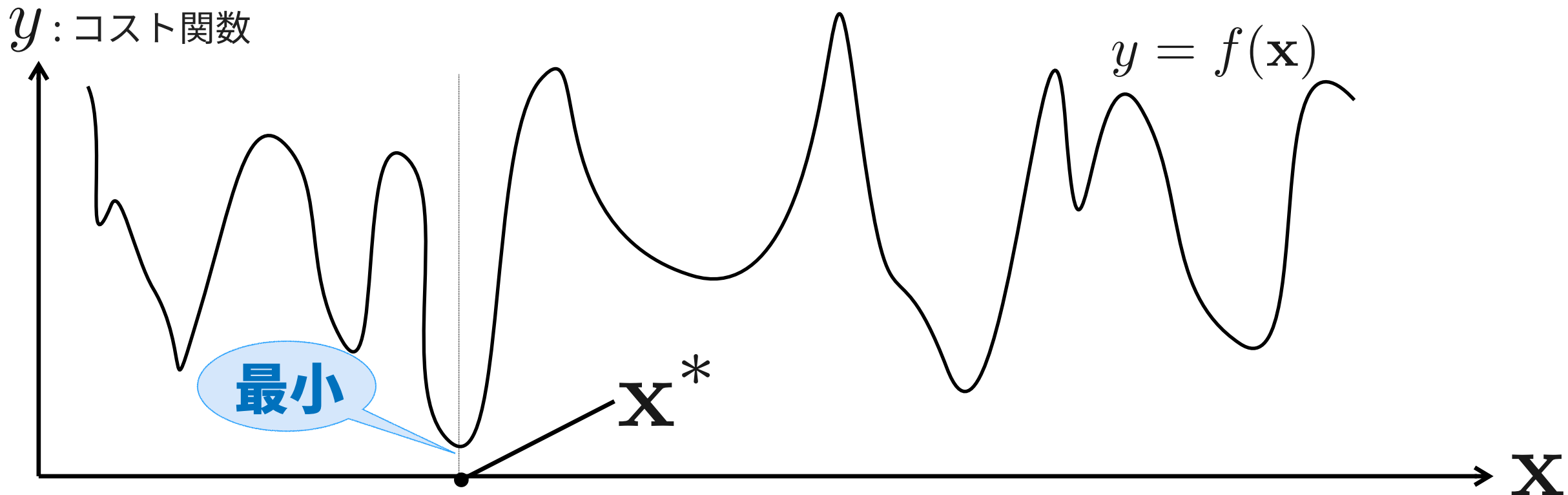
揺らぎを徐々に弱めることにより、組合せ最適化処理を行う方法

組合せ最適化問題

離散変数を引数とする実数関数が**最小値**を取る条件を探索

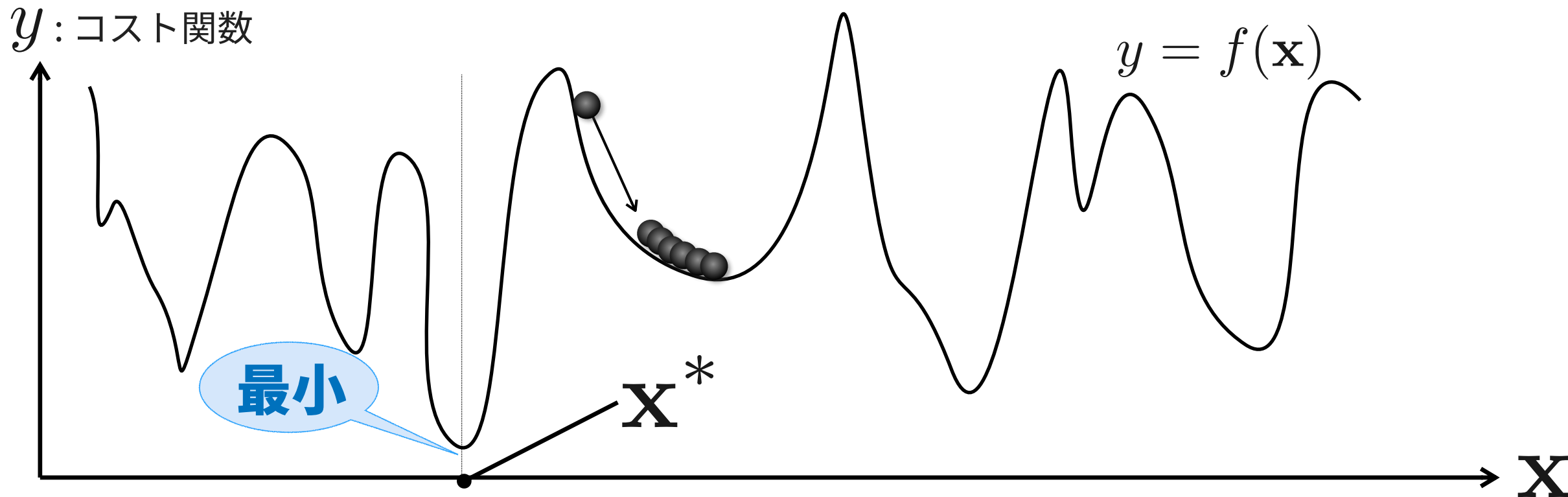
$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$$

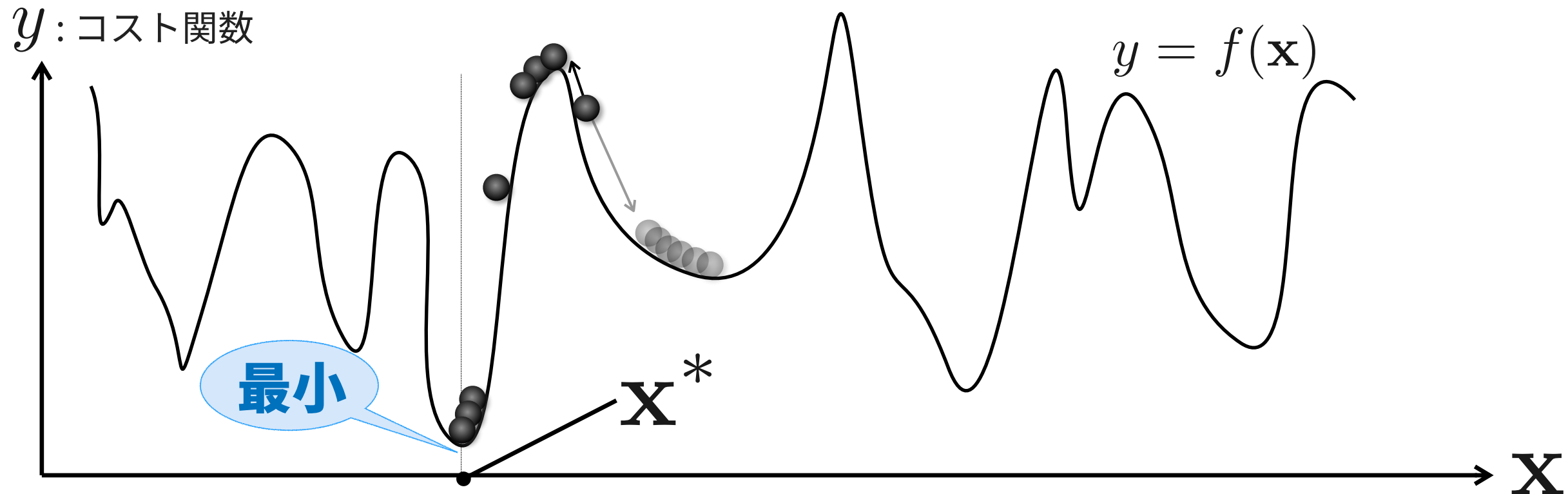


下に向かうだけでは、失敗する

ベストな答えは見つからない



上がるプロセスも、必要 どのように実現するか？



熱ゆらぎ

H₂O分子の集合体の様子



原子・分子は相互作用や強制力に従い
安定な構造を自発的に形成する
ゆらぎ小

原子・分子は自由に動き回る
ゆらぎ大

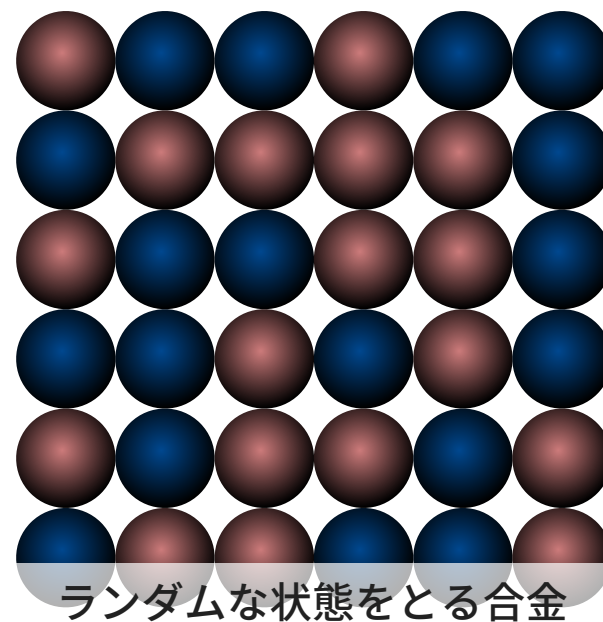
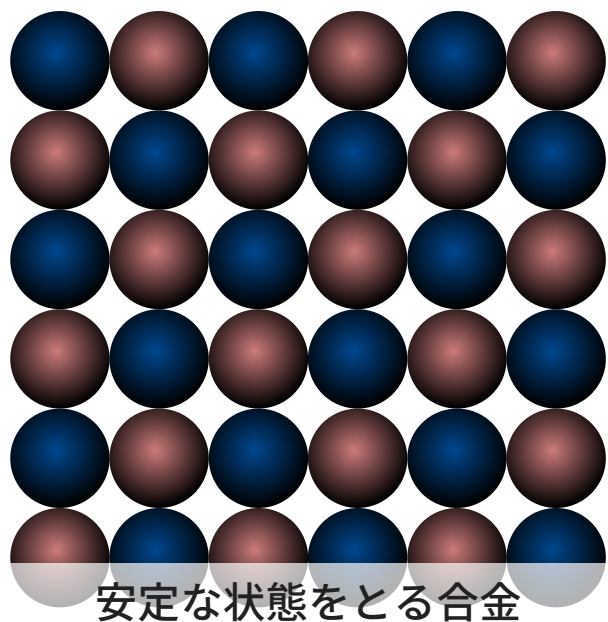
低温

温度

高温

熱ゆらぎ

二元合金の様子



原子・分子は相互作用や強制力に従い
安定な構造を自発的に形成する
ゆらぎ小

原子・分子は自由に動き回る
ゆらぎ大

アニーリング



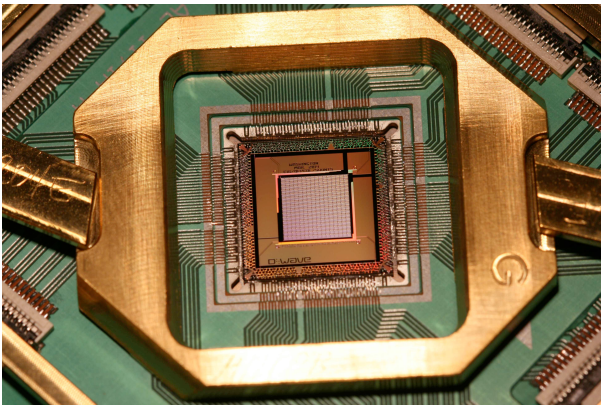
シミュレーテッドアニーリングと量子アニーリング

量子ゆらぎ効果

量子アニーリング

量子効果を徐々に弱める

T. Kadowaki and H. Nishimori,
Phys. Rev. E, **58**, 5355 (1998).



D-Wave Systems Inc. webサイトより図を抜粋

絶対ゼロ度
(基底状態)

イジングモデル

$$\mathcal{H} = - \underbrace{\sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z}_{\text{スピン(ビット)間相互作用}} - \underbrace{\sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z}_{\text{磁場(強制力)}}$$

$$\sigma_i^z = \pm 1$$



- ✓ 組合せ最適化問題のハミルトニアン
- ✓ 基底状態を求めることは困難(組合せ爆発)

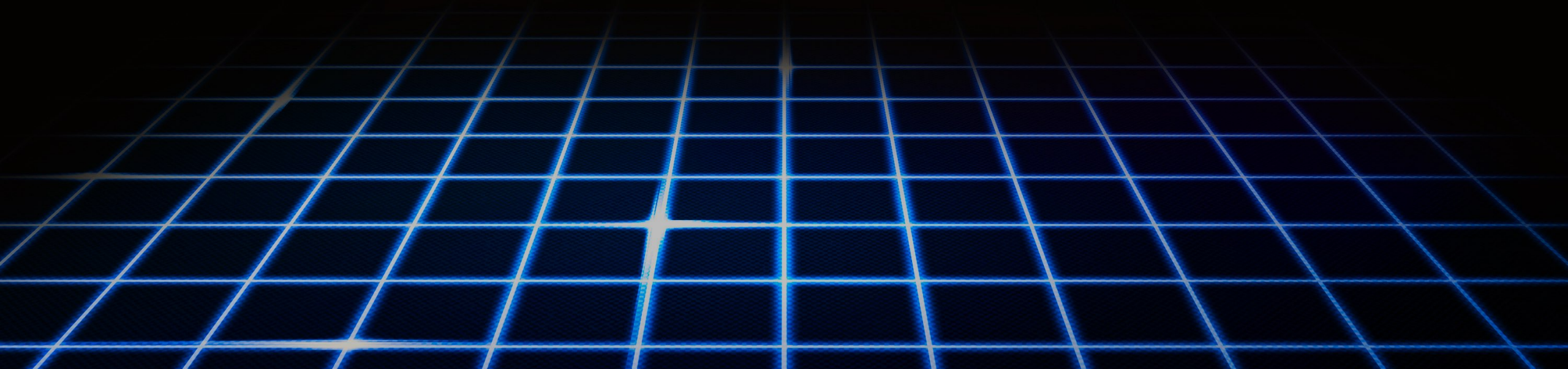
シミュレーテッドアニーリング

温度を徐々に下げる

温度
(熱ゆらぎ効果)

S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi, Science, **220**, 671 (1983).

量子アニーリングの過去、現在、未来





量子アニーリングの過去 D-Wave 登場前

主要なアルゴリズム 古典コンピュータ使用

- **Schrödinger方程式を直接解く (Runge-Kutta, 厳密対角化)**

少数系のみ取り扱い可能($N=20$ 程度)

- **経路積分表示量子モンテカルロ法**

D次元量子系をD+1次元古典系にマップ(Suzuki-Trotter分解)
大規模系も実行可能

- **グリーン関数モンテカルロ法**

大規模系も実行可能

- **ゼロ温度モンテカルロ法**

原理的には大規模系も実行可能

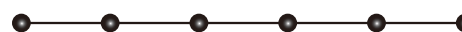
- **密度行列くりこみ群法**

1次元系であれば実行可能

- **平均場近似方程式**

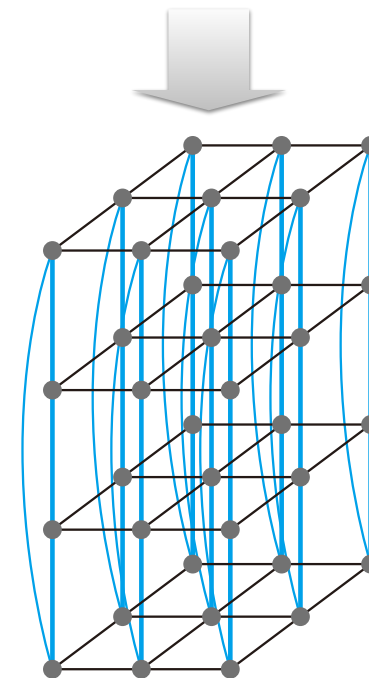
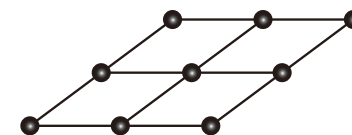
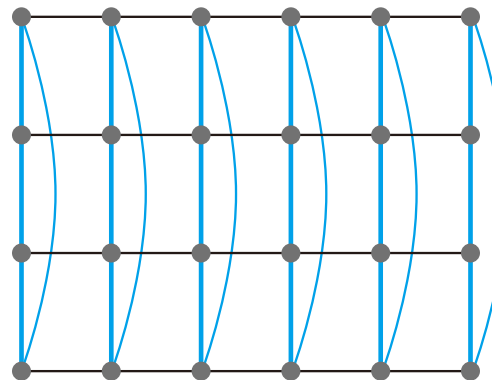
大規模系も実行可能

D次元量子系



等価
変換

D+1次元古典系



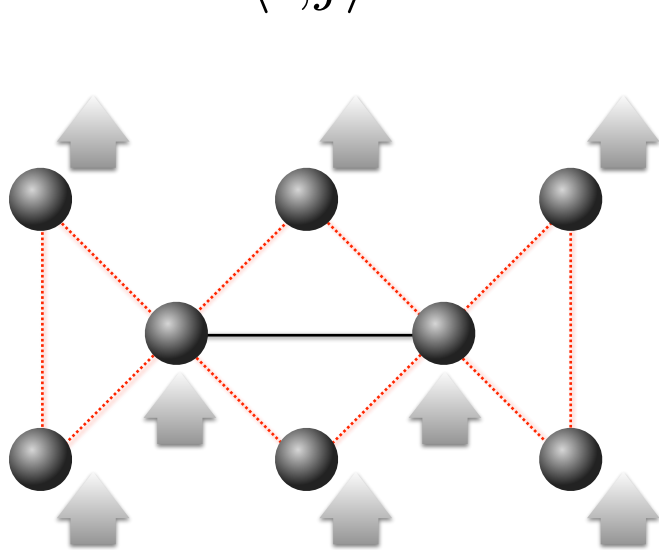
量子アニーリング提案論文

T. Kadowaki and H. Nishimori (1998)

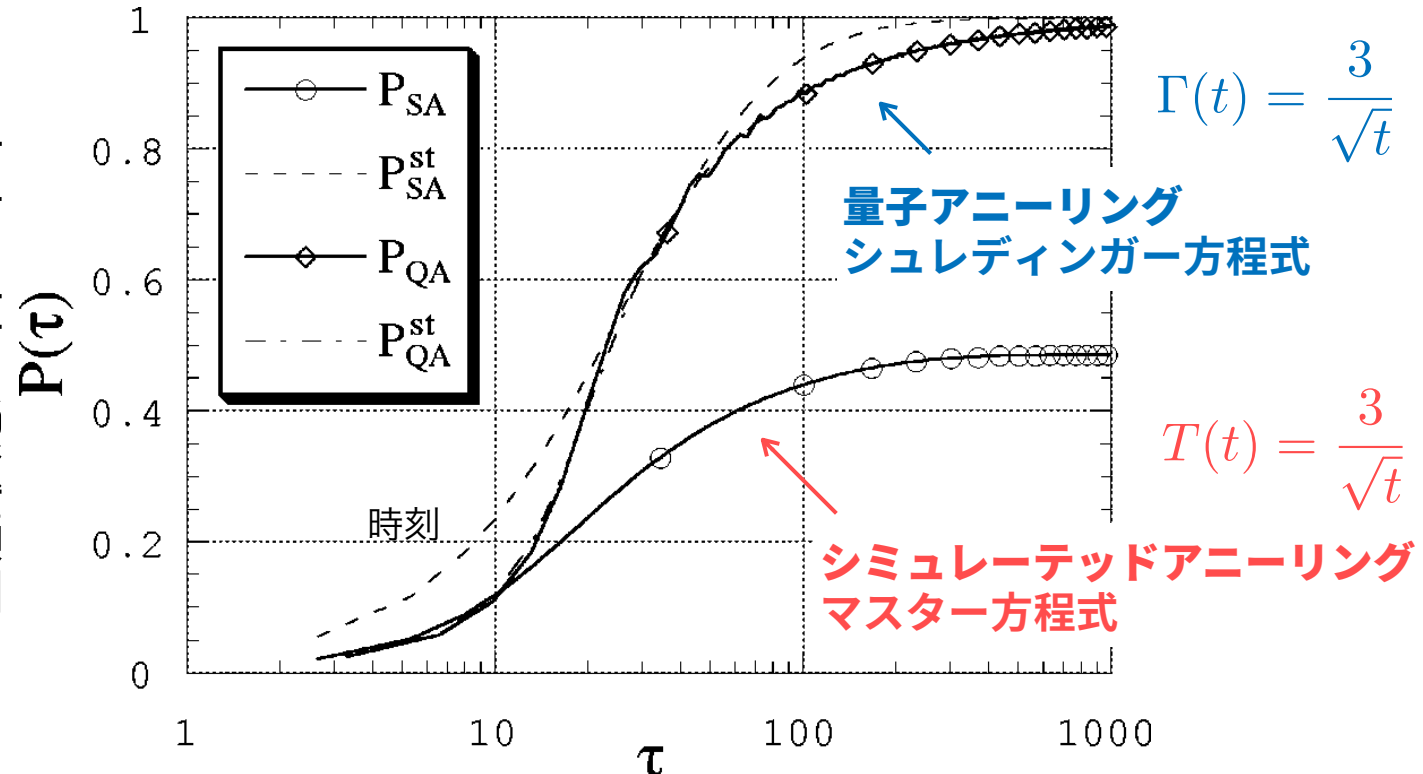
<http://www.stat.phys.titech.ac.jp/~nishimori/papers/98PRE5355.pdf>

量子効果を反映させた物理系のダイナミクスをシミュレーション (Schrödinger方程式)

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - h \sum_i \sigma_i^z - \Gamma(t) \sum_i \sigma_i^x \quad h/J = 0.1 \quad N = 8$$



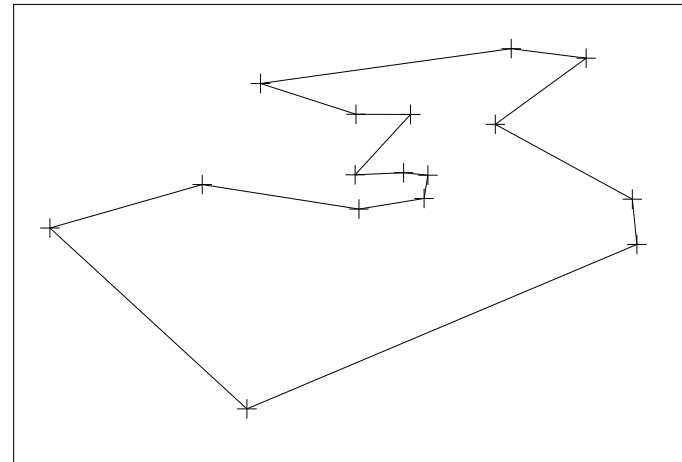
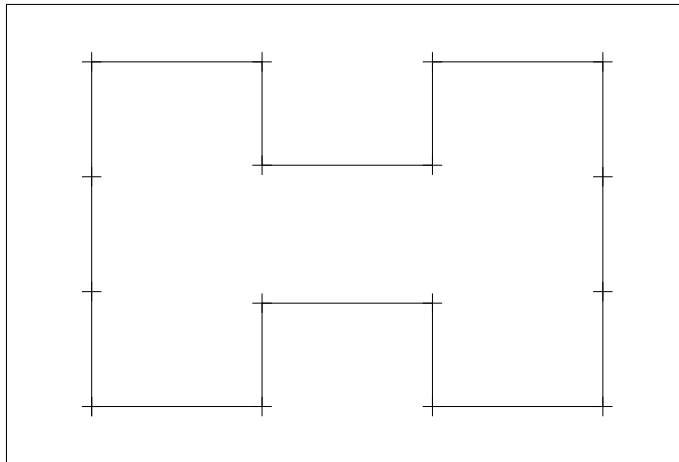
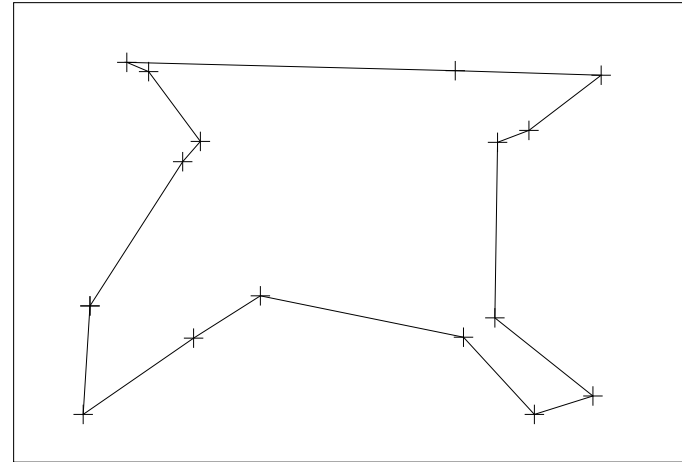
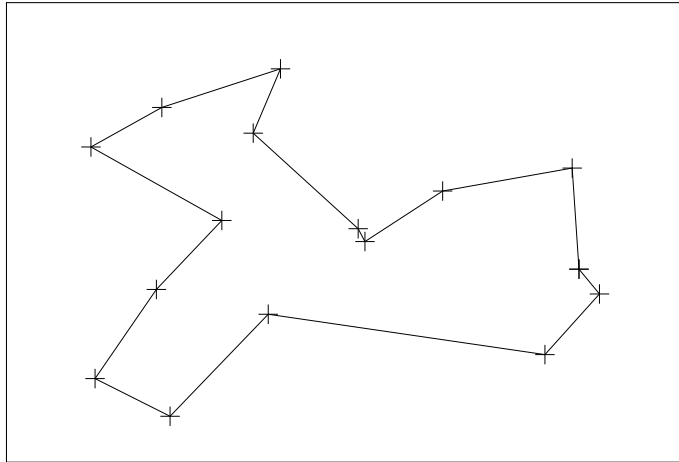
時刻 τ において
基底状態を含む確率



門脇博士の学位論文 (1998, 東工大)

T. Kadowaki, Ph. D thesis (quant-ph/0205020)
<https://arxiv.org/abs/quant-ph/0205020>

量子効果を反映させた物理系をシミュレーション (量子モンテカルロ法)



門脇博士の学位論文 (1998, 東工大)

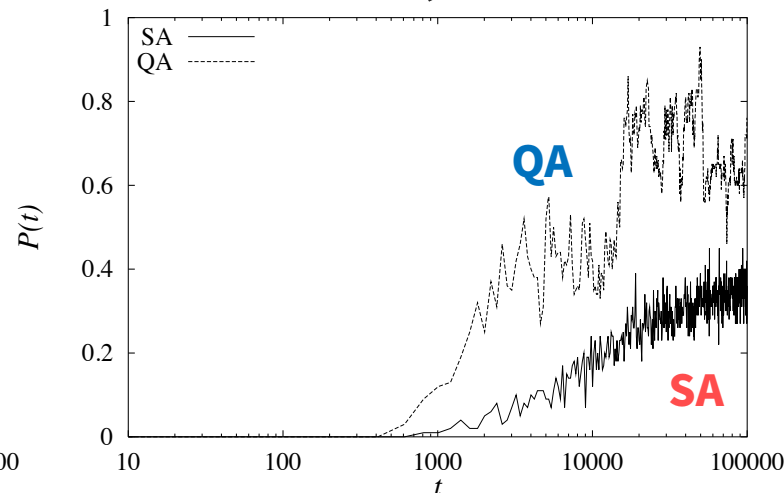
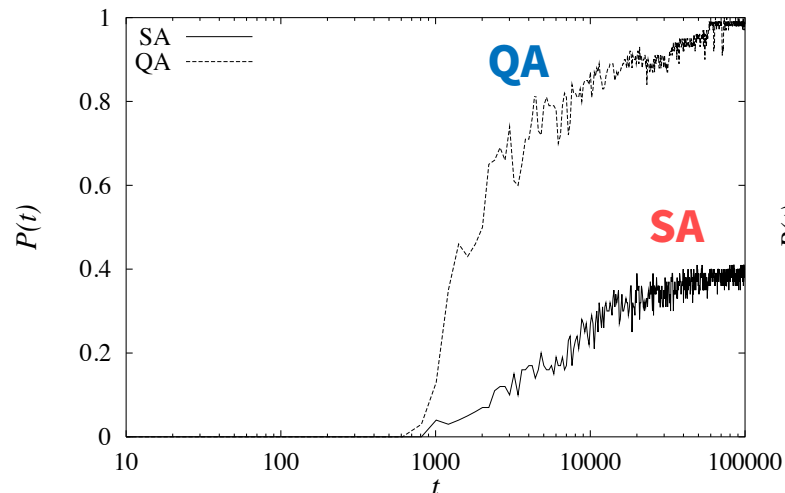
T. Kadowaki, Ph. D thesis (quant-ph/0205020)

<https://arxiv.org/abs/quant-ph/0205020>

量子効果を反映させた物理系をシミュレーション (量子モンテカルロ法)

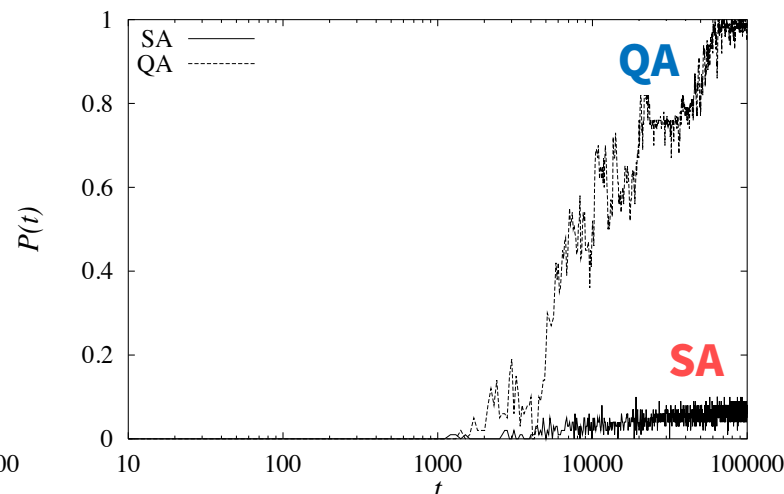
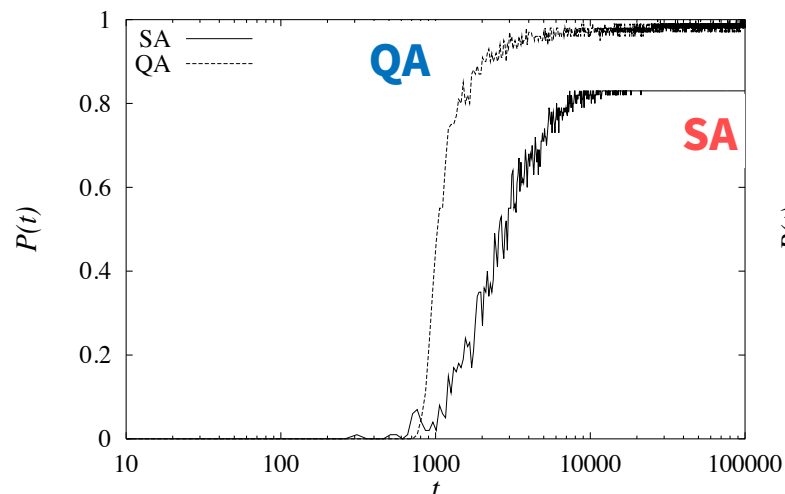
Better

時刻 t において
基底状態を含む確率



Better

時刻 t において
基底状態を含む確率



経路積分表示量子モンテカルロ法

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_q$$

↑
最適化問題を表現する
古典ハミルトニアン

量子揺らぎを表現する
ハミルトニアン

$$[\mathcal{H}_c, \mathcal{H}_q] \neq 0$$

$$e^{-\beta\mathcal{H}} \neq e^{-\beta\mathcal{H}_c} e^{-\beta\mathcal{H}_q}$$

指数関数 $e^{-\beta\mathcal{H}}$ を計算することが困難 → 経路積分表示(**Suzuki-Trotter分解**)による近似解法

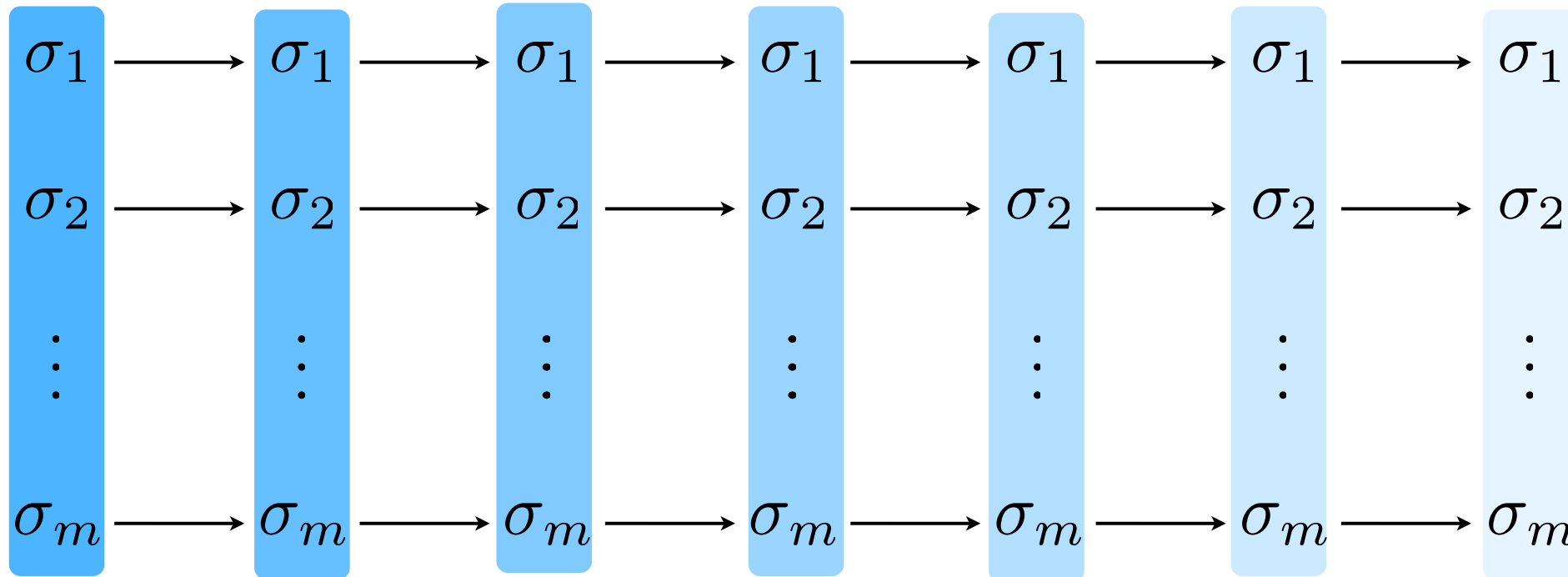
$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\beta}{m}\mathcal{H}\right) &= \exp\left[-\frac{\beta}{m}(\mathcal{H}_c + \mathcal{H}_q)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{\beta}{m}\mathcal{H}_c\right) \exp\left(-\frac{\beta}{m}\mathcal{H}_q\right) + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\beta}{m}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Trotter数
(擬並列度)

D次元量子系をD+1次元にマップ

経路積分表示量子モンテカルロ法

m個のレプリカ間に相互作用が入った擬並列化計算

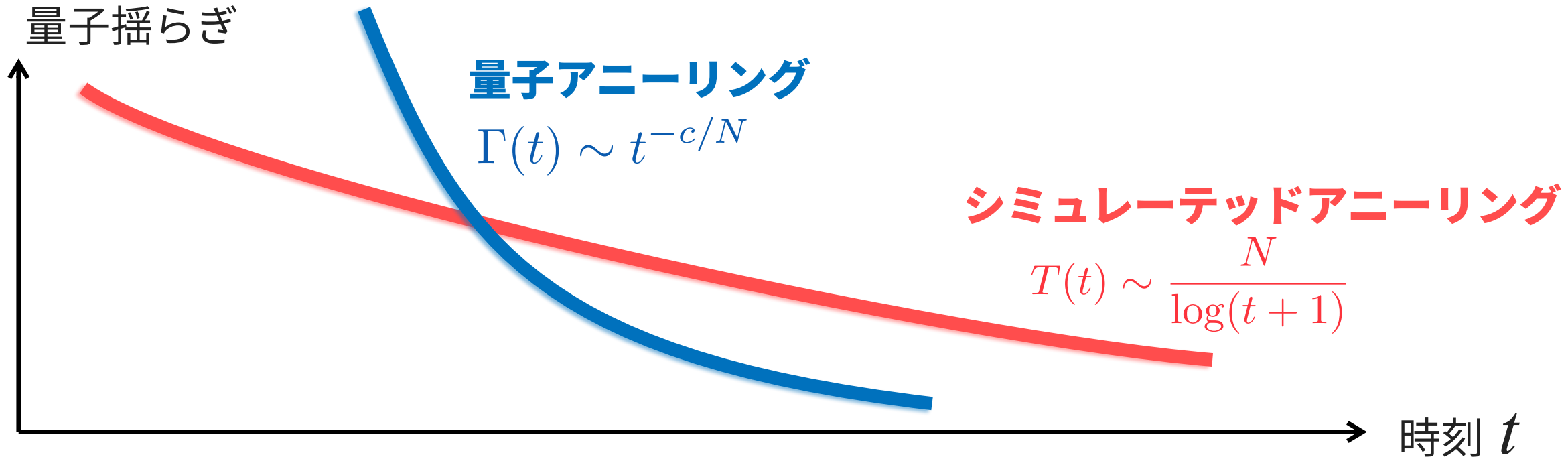


時間とともに量子揺らぎが弱められる → モンテカルロステップ

収束定理

非常にゆっくりパラメータを変えれば、**确实**に基底状態に到達

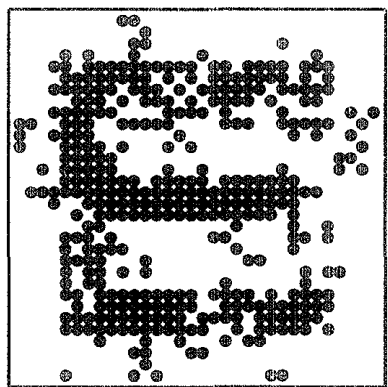
温度、量子揺らぎ



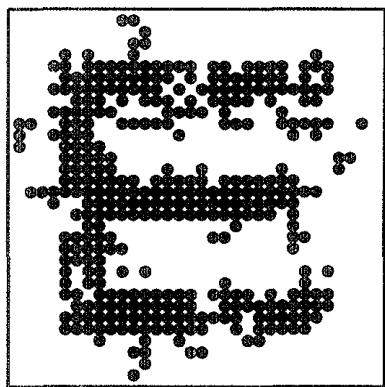
数学的に确实性が保証された計算技術

S. Geman and D. Geman, IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. Vol. **6**, 721 (1984)
S. Morita and H. Nishimori, J. Math. Phys. Vol. **49**, 125210 (2008)

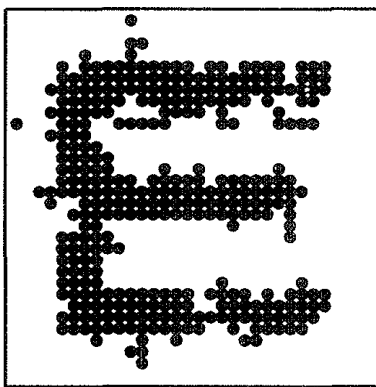
量子アニーリング登場以前 平均場反復計算法



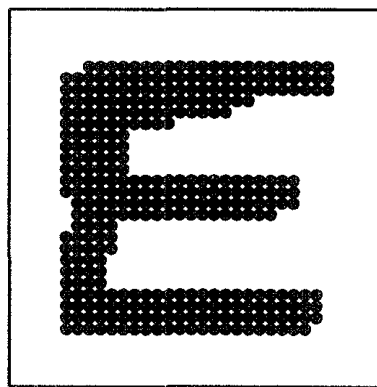
(a) $T = 7.0$



(b) $T = 6.0$

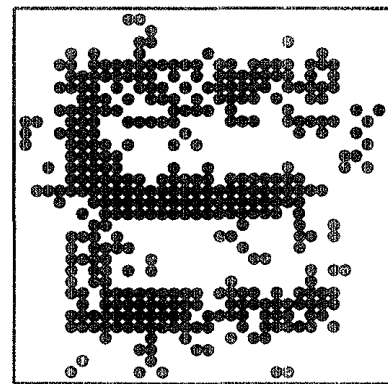


(c) $T = 5.0$

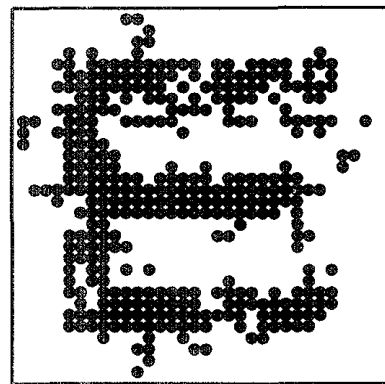


(d) $T = 0.1$

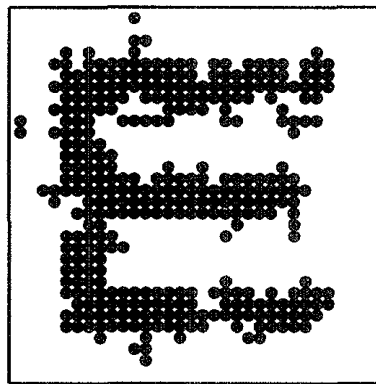
古典平均場(熱)アニーリング
による画像修復過程



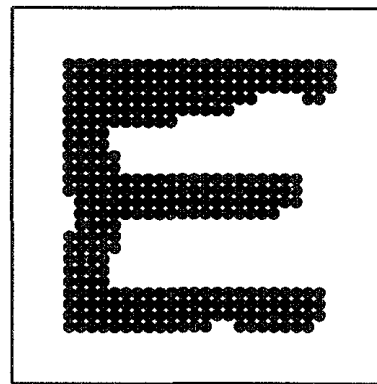
(a) $h_x = 7.0$



(b) $h_x = 6.0$



(c) $h_x = 5.0$



(d) $h_x = 0$

量子平均場反復法による
画像修復過程

量子ゆらぎと温度が同様の振る舞い

主要な応用例 古典コンピュータ使用

- 正方格子ランダムイジングスピン模型

モンテカルロSAとモンテカルロQAの比較：QAの方が良い

Martonák et al. (2002), Santoro et al. (2002)

- 巡回セールスマン問題

モンテカルロSAとモンテカルロQAの比較：QAの方が良い

Martonák et al. (2004), Battaglia Stella et al. (2005)

- K-SAT問題

モンテカルロSAとモンテカルロQAの比較：SAの方が良い

Battaglia, Santoro, and Tosatti (2005)

※ただし、SAですら他の近似アルゴリズムには負けている

- 画像修復

モンテカルロSAとモンテカルロQAの比較：SAとQAがほぼ同等

Inoue (2005)

- クラスタリング

モンテカルロSAとモンテカルロQAの比較：QAの方が良い

Kurihara, Tanaka, Miyashita (2009), Sato, Tanaka et al. (2009), Sato, Tanaka et al. (2013)

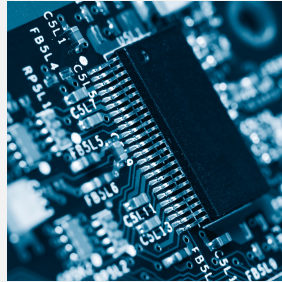
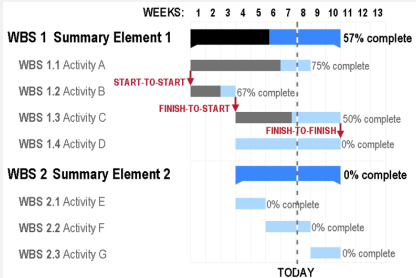
- 特異値分解

実時間QAで実行するための理論的提案

Hashizume et al. (2015), Hashizume, Tanaka, Tamura, in preparation

量子アニーリング実装の手順

解きたい組合せ最適化問題を用意



イジングモデルへマッピング

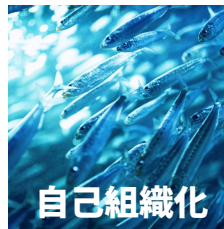
$$\mathcal{H}_{\text{opt.}} = - \sum_{\langle i, j \rangle} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_i h_i \sigma_i^z$$
$$\sigma_i^z = \pm 1 \quad \uparrow \downarrow$$

イジングモデルを経由しない方法

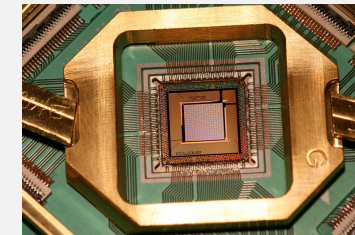
ただし、ハードウェアは使用できない

自発的に答えが出力される

組合せ最適化問題からイジングモデルへのマッピングの逆変換



量子アニーリングマシンや古典コンピュータ上でのソフトウェア実装



D-Wave Systems Inc. webサイトより

シミュレーテッドアニーリングが可能な条件

2つの前提

- ・それぞれの状態(解の候補)をビット列で表現可能
- ・それぞれの状態(解の候補)のコスト関数値が多項式時間で計算可能

ビット列	コスト関数値
000	E(000)
001	E(001)
010	E(010)
011	E(011)
100	E(100)
101	E(101)
110	E(110)
111	E(111)

Step 1 初期状態を準備(ランダムに状態を生成)

例として、011という状態を用意したとする。

Step 2 温度パラメータTを大きめに用意

コスト関数値の最大値より大きな値を取る。

※コスト関数値の最大値のオーダーは多項式時間で得られる。

Step 3 状態を表すビットの1つをランダムに選択

例として、中央のビットを選択したとする。

**Step 4 Step 3で選択したビットを反転して得られる状態と、
もとの状態のコスト関数値の差 ΔE を計算。**

確率 $\min\{1, \exp(\Delta E/T)\}$ で選択したビットを反転。

コスト関数値が小さくなる方に進む傾向がある。この傾向はTが小さいと顕著。

上記の例では、 $\Delta E = E(011) - E(001)$ となる。

Step 5 Step 3, 4 をビットの個数分だけ繰り返す。

平均的に1つのビットの反転判定を行うことになる。

Step 6 温度パラメータを少し小さくし、Step3, 4, 5を繰り返す。

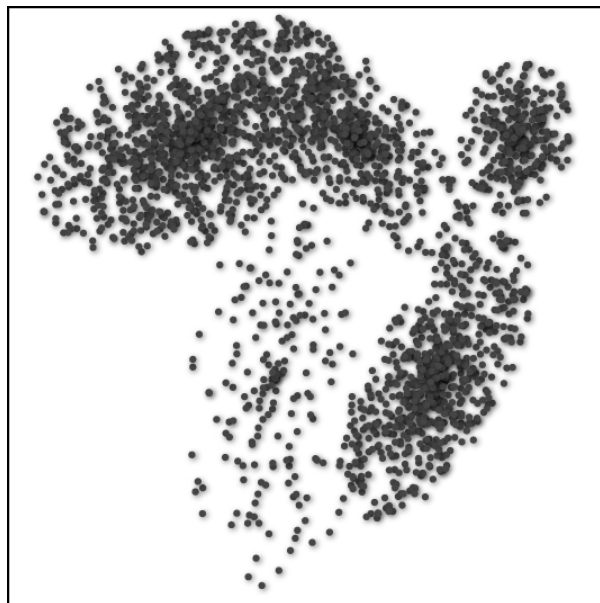
例として、 $T' = T - \Delta T$ とする。

Step 7 温度パラメータがゼロ付近になったら処理終了。最後の状態を読みだす。

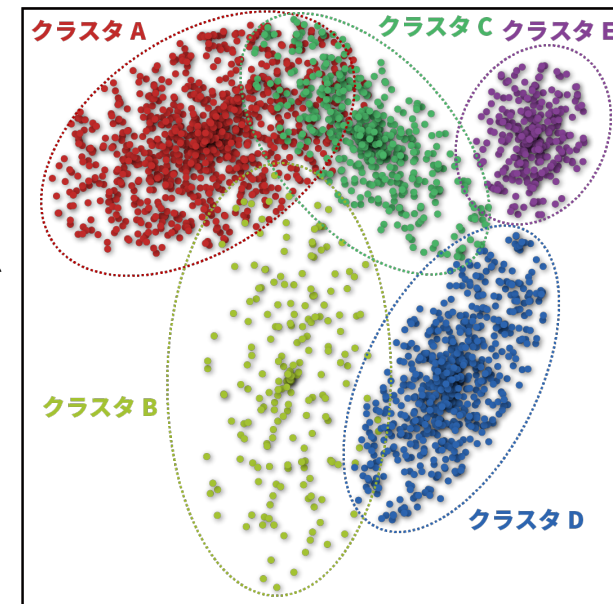
「収束」系のアルゴリズムと異なり、計算時間をプログラム設計者自身が設定可能。

クラスタリングに対する適用

経路積分表示 (統計力学のテクニック) を用いることで
シミュレーテッドアニーリングと同様の計算が実行可能



量子アニーリングを
用いたクラスタリング



K. Kurihara, S. Tanaka, and S. Miyashita, UAI2009 (2009)

http://www.shutanaka.com/papers_files/ShuTanaka_DEXSMI_10.pdf

I. Sato, K. Kurihara, S. Tanaka, H. Nakagawa, and S. Miyashita, UAI2009 (2009)

https://www.slideshare.net/issei_sato/quantum-annealing-fof

https://www.slideshare.net/issei_sato/ss-12125104

I. Sato, S. Tanaka, K. Kurihara, S. Miyashita, and H. Nakagawa, Neurocomputing **121**, 523 (2013)

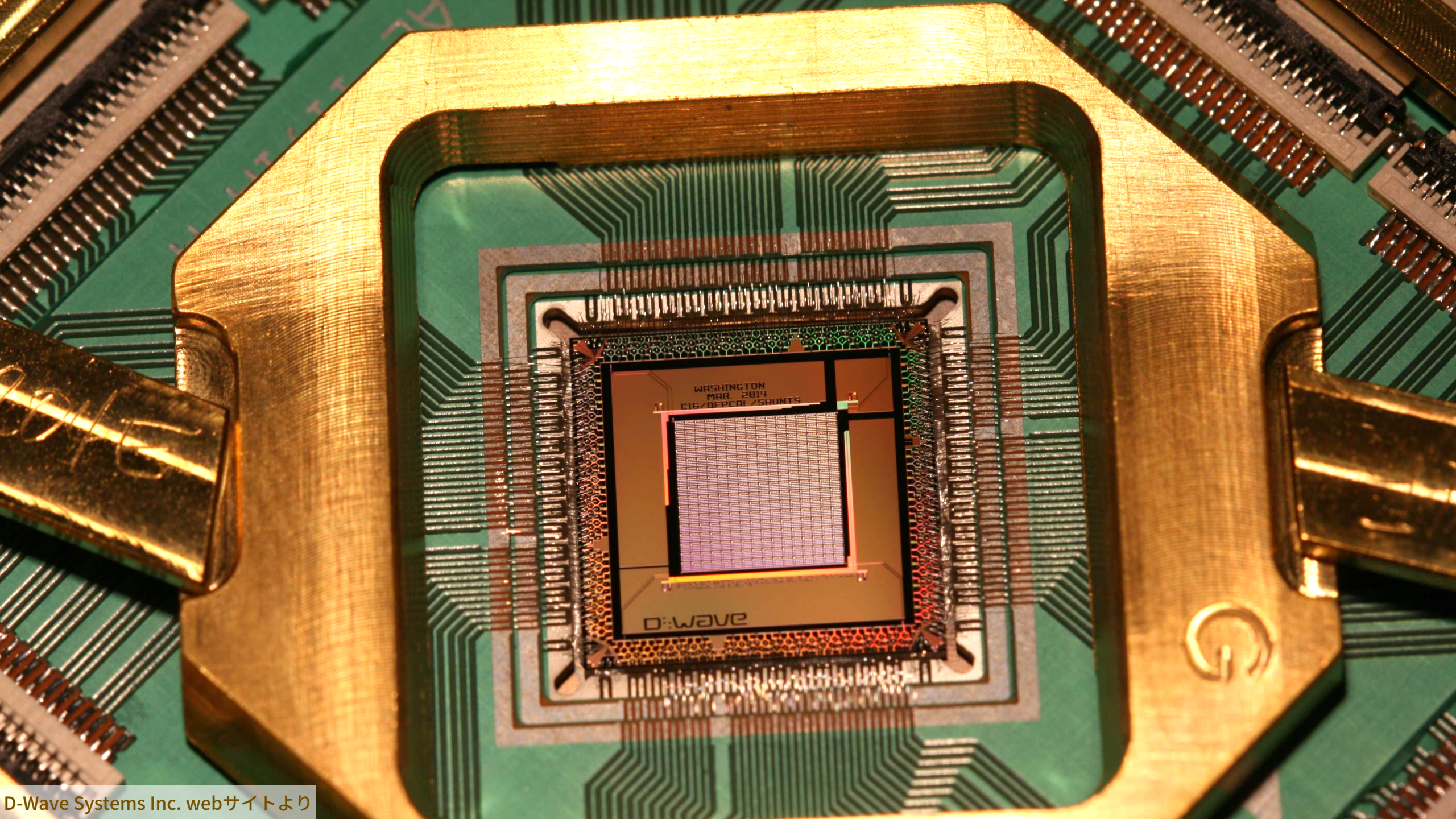
熱・量子同時制御ハイブリッドアニーリング

量子ゆらぎ効果



The background is a dark blue field filled with numerous thin, light blue lines that radiate from various points, creating a sense of depth and movement. Interspersed among these lines are many out-of-focus, hexagonal light spots in shades of blue and white, resembling bokeh or distant stars. The overall effect is a high-tech, futuristic aesthetic.

量子アニーリングの現在 D-Wave 登場後



D-Wave

約20億円/台

1nTまで減磁(ノイズ除去のため)

20mKまで冷却

12kWの消費電力($1.7\text{fW}=10^{-14}\text{W}$ の演算消費電力)
スパコン：MW, 家庭消費電力：kW

2048量子ビット

D-Wave

超伝導エレクトロニクスによる新しい量子技術の創出

高い制御性を持つ超伝導磁束量子ビット

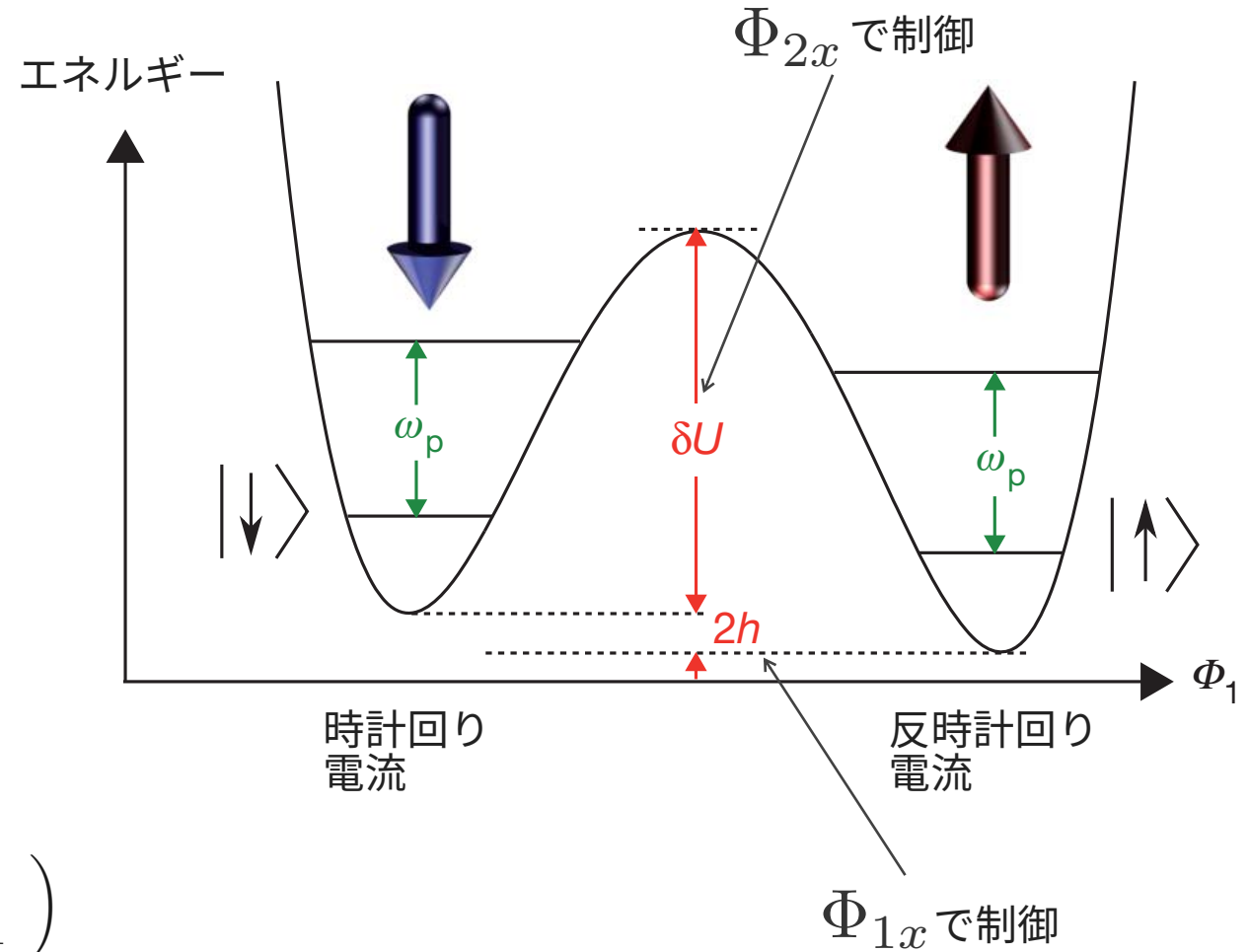
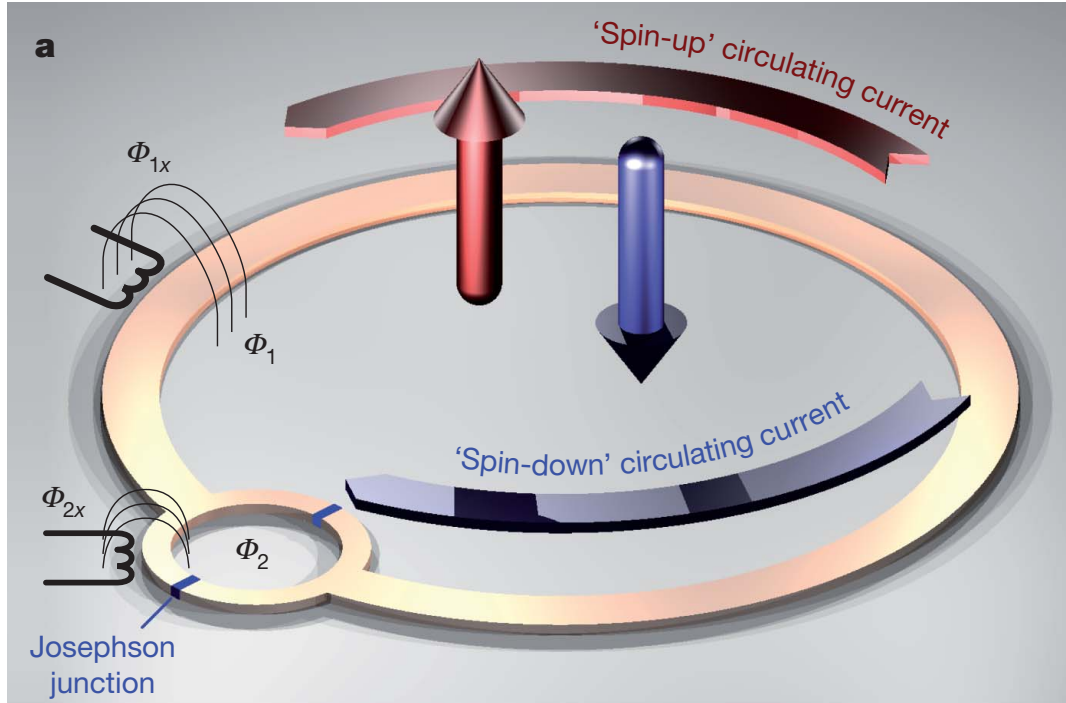
磁束量子パラメトロン(QFP)で磁束量子磁場の増幅

超伝導量子干渉計(dc SQUID)で磁束量子磁場の観測

日本発の技術の結晶

関優也氏(東京工業大学西森研究室)提供、D-Wave Systems Inc.のwebサイトより、M. W. Johnson et al. Nature Vol. **473**, 194 (2011)

D-Waveの量子ビット



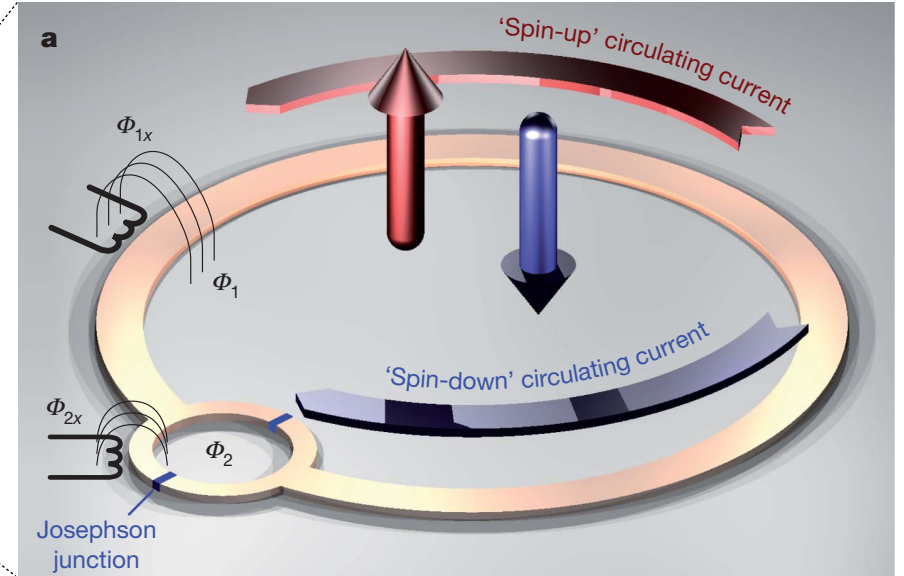
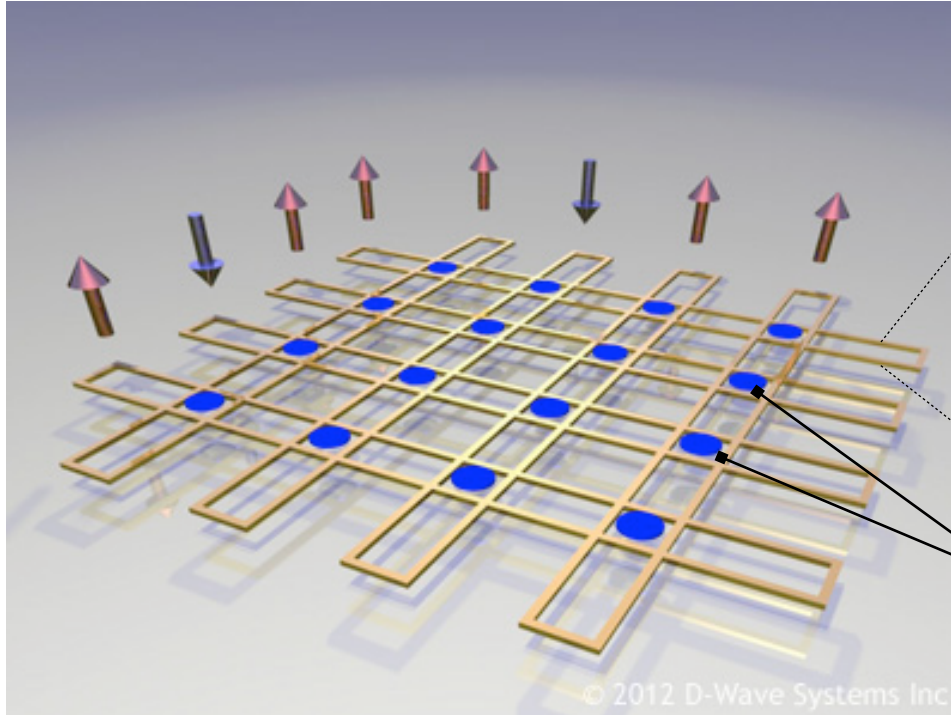
$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} [\epsilon \hat{\sigma}_z + \Delta_q \hat{\sigma}_x]$$

$$\epsilon = 2|I_q^p|(\Phi_q^x - \Phi_0/2) \quad \hat{\sigma}_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_q = \langle e | \mathcal{H} | e \rangle - \langle g | \mathcal{H} | g \rangle \quad \hat{\sigma}_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

D-Waveの量子ビットユニット

量子ビット 8 つで、1 ユニット



量子ビット間の相互作用
を調整(coupler)

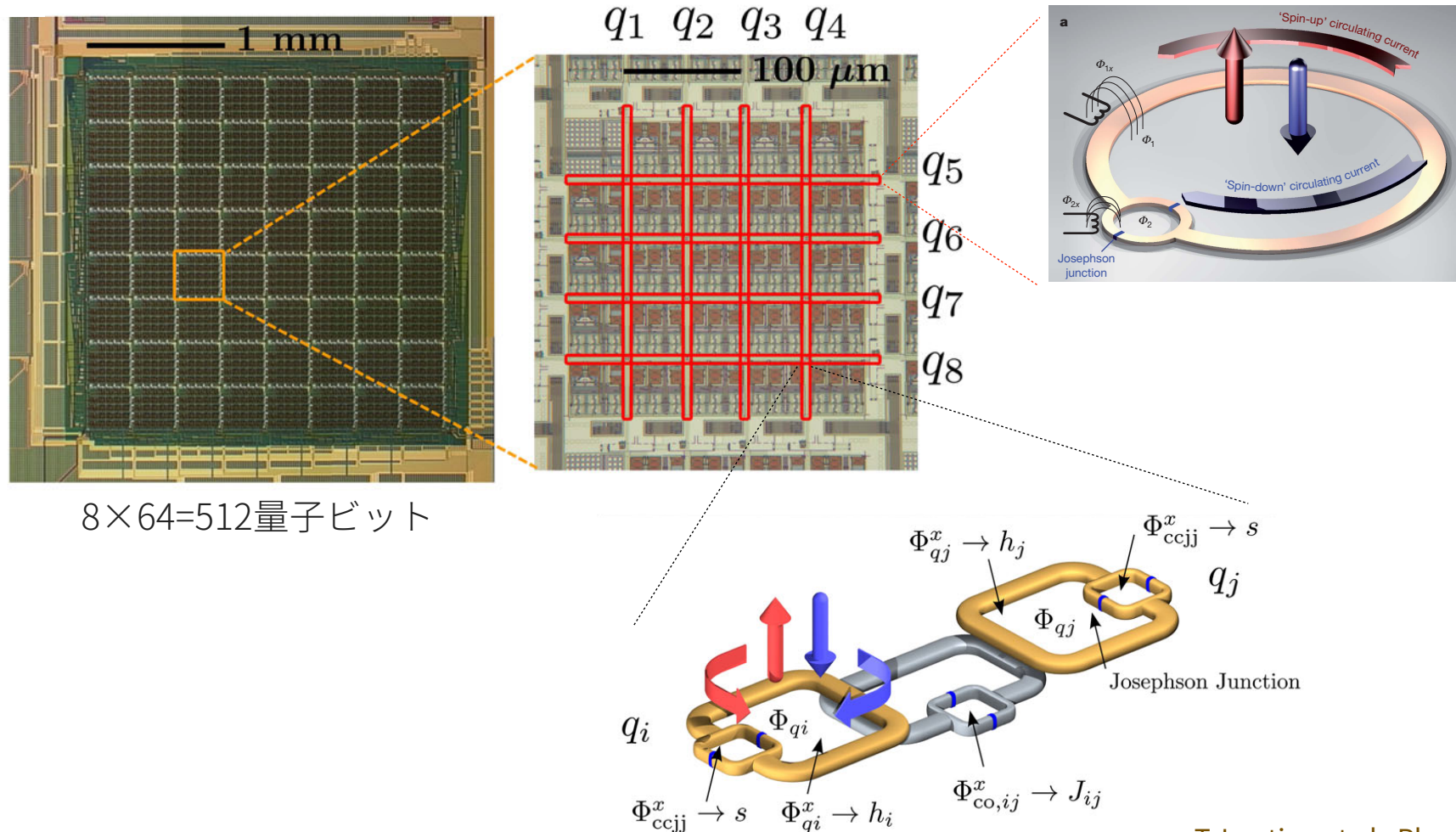
縦横 4 つの量子ビットが交差

$$\mathcal{H}_{\text{opt}} = \sum_{i,j=1}^N J_{ij} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z + \sum_{i=1}^N h_i \hat{\sigma}_i^z \quad \hat{\sigma}_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

M. W. Johnson et al. Nature Vol. **473**, 194 (2011)
D-Wave Systems Inc. webサイトより

D-Waveの量子ビットネットワーク

2.5mm四方に、512量子ビットを配列(D-Wave Two)



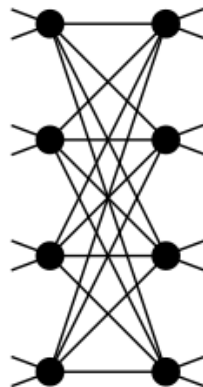
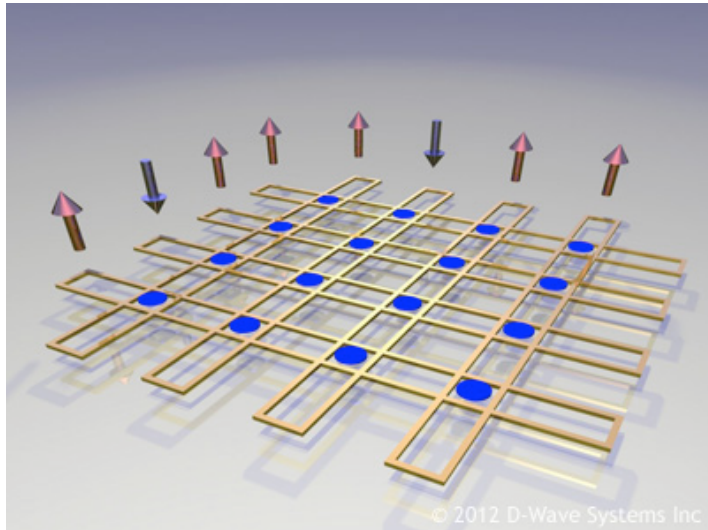
8×64=512量子ビット

T. Lanting et al. Phys. Rev. X Vol. 4, 021041 (2014)

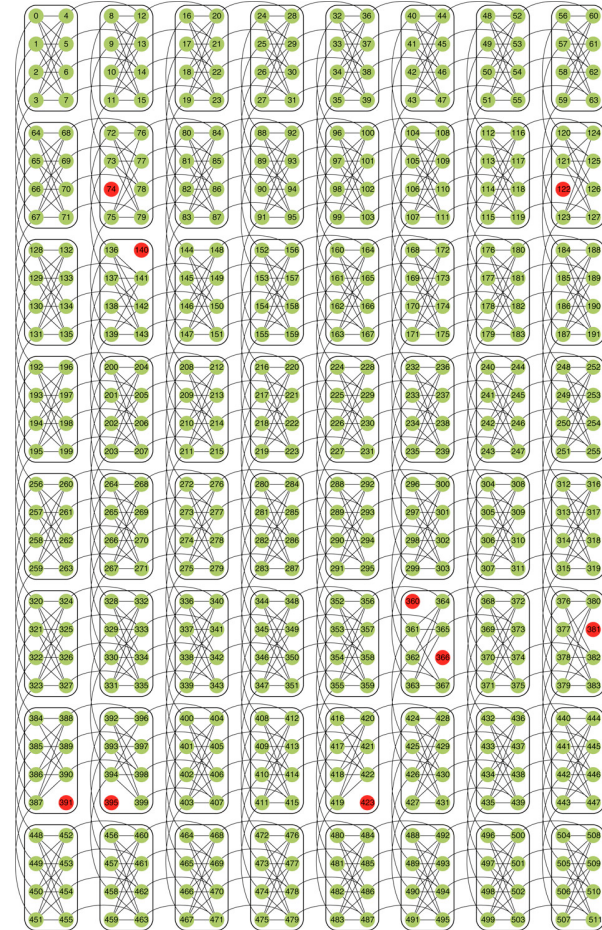
田中 宗 (早稲田大学 高等研究所、JST さきがけ「量子の状態制御と機能化」) 60

D-Waveの量子ビットネットワーク

1ユニット(8量子ビット)



ユニット間相互作用模式図

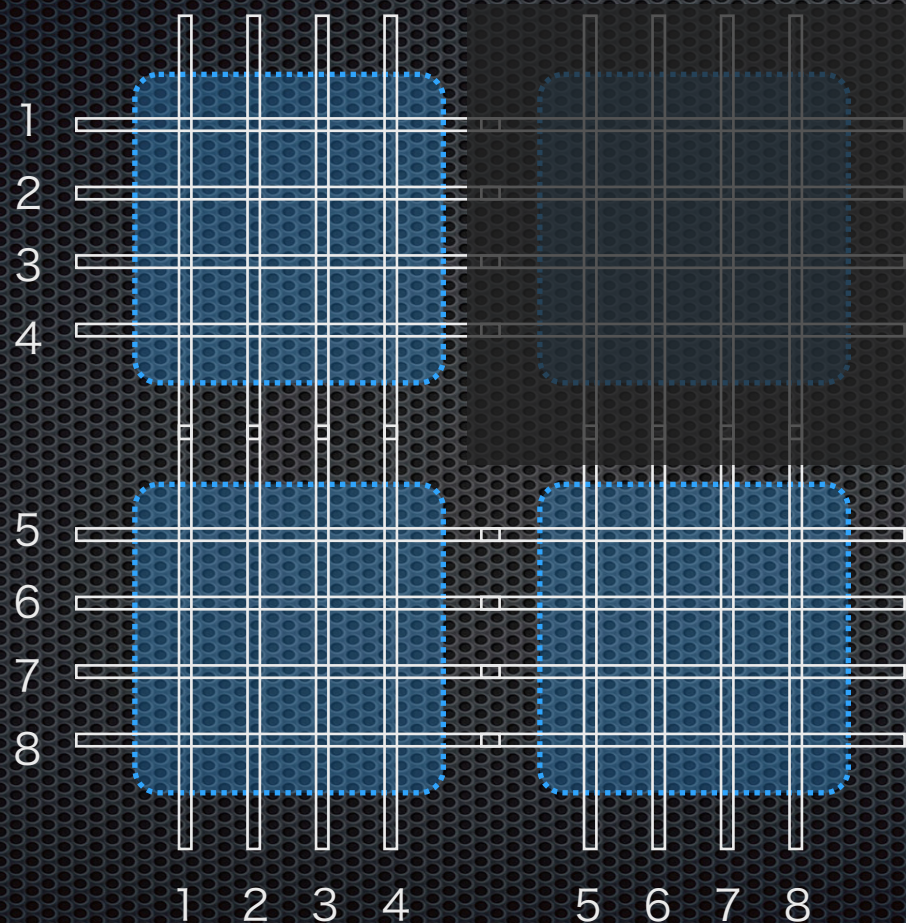


D-Wave Systems Inc. webサイトより
K. L. Pudenz et al. Nature Communications, **5**, 3243 (2014)

D-Wave のプログラミング

例題：全結合イジング模型をD-Wave の量子ビットネットワーク上にマップ (キメラ構造)

8つの全結合イジング模型を作る



2048量子ビット
(D-Wave 2000Q)

**64量子ビットの
全結合イジング模型を
作成可能**

D-Waveの詳細

リクルートコミュニケーションズ・D-Wave Systems・早稲田大学高等研究所の共催イベントを2016年5月11日に開催しました。

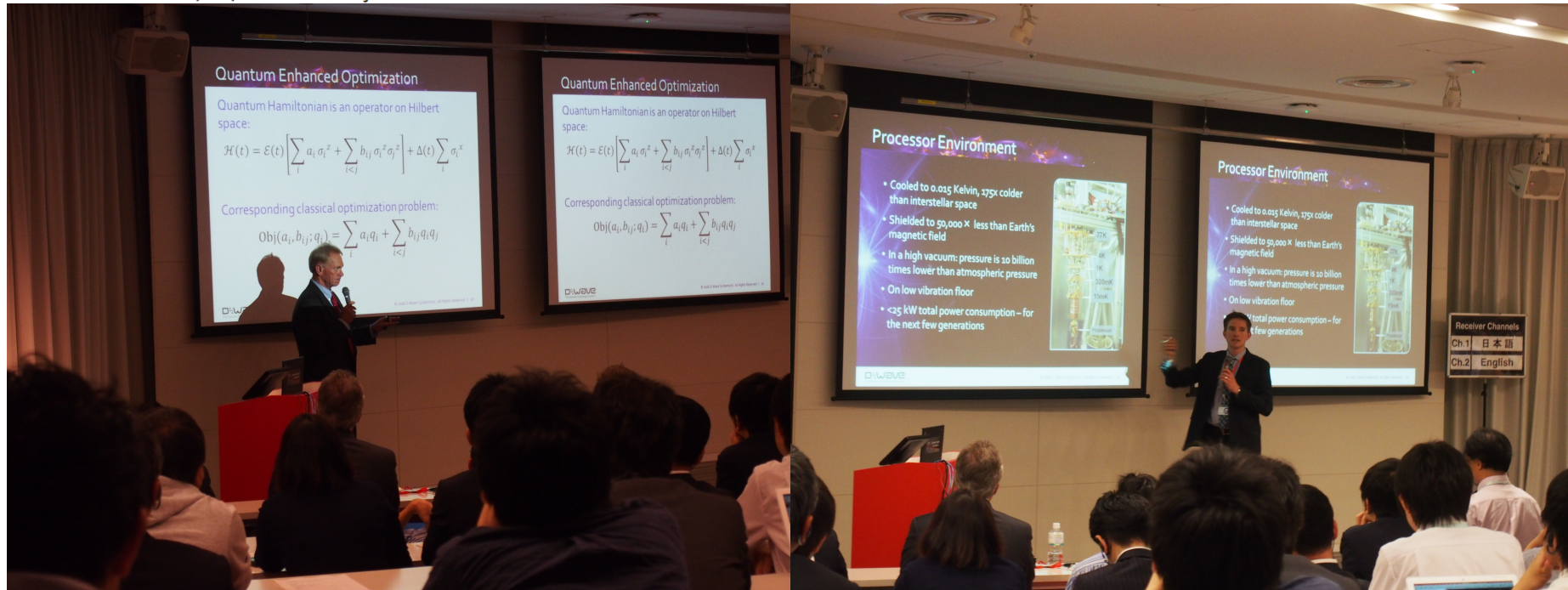
<https://www.rco.recruit.co.jp/career/engineer/blog/46/> に、スライドや講演動画へのリンクがあります



イベント

RCO Study Night 「D-Waveが切り開く、量子コンピュータを活用する未来」を開催しました

2016/05/16 stakaya



Quantum Enhanced Optimization

Quantum Hamiltonian is an operator on Hilbert space:

$$\mathcal{H}(t) = \varepsilon(t) \left[\sum_i a_i \sigma_i^z + \sum_{\langle i,j \rangle} b_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x \right] + \Delta(t) \sum_i \sigma_i^x$$

Corresponding classical optimization problem:

$$\text{Obj}(a_i, b_{ij}; q_i) = \sum_i a_i q_i + \sum_{\langle i,j \rangle} b_{ij} q_i q_j$$

Quantum Enhanced Optimization

Quantum Hamiltonian is an operator on Hilbert space:

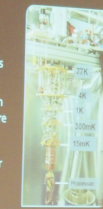
$$\mathcal{H}(t) = \varepsilon(t) \left[\sum_i a_i \sigma_i^z + \sum_{\langle i,j \rangle} b_{ij} \sigma_i^x \sigma_j^x \right] + \Delta(t) \sum_i \sigma_i^x$$

Corresponding classical optimization problem:

$$\text{Obj}(a_i, b_{ij}; q_i) = \sum_i a_i q_i + \sum_{\langle i,j \rangle} b_{ij} q_i q_j$$

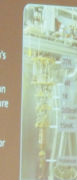
Processor Environment

- Cooled to 0.015 Kelvin, 175x colder than interstellar space
- Shielded to 50,000 X less than Earth's magnetic field
- In a high vacuum: pressure is 10 billion times lower than atmospheric pressure
- On low vibration floor
- <35 kW total power consumption – for the next few generations



Processor Environment

- Cooled to 0.015 Kelvin, 175x colder than interstellar space
- Shielded to 50,000 X less than Earth's magnetic field
- In a high vacuum: pressure is 10 billion times lower than atmospheric pressure
- On low vibration floor
- <35 kW total power consumption – for the next few generations



Receiver Channels
Ch 1 日本語
Ch 2 English

量子アニーリング実装の手順とキーワード

解くべき組合せ最適化問題を用意



イジングモデル(2値変数2次形式)で表現

$$\mathcal{H} = - \sum_{(ij) \in E} J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z - \sum_{i \in V} h_i \sigma_i^z \quad \sigma_i^z = \pm 1$$

量子アニーリングマシンによる自然計算



D-Wave Systems
webサイトより

測定により解が得られる



統計力学理論

組合せ最適化問題における
膨大なデータ処理の
理論基盤



量子並列性

量子重ね合わせ状態を
初期状態とした情報処理



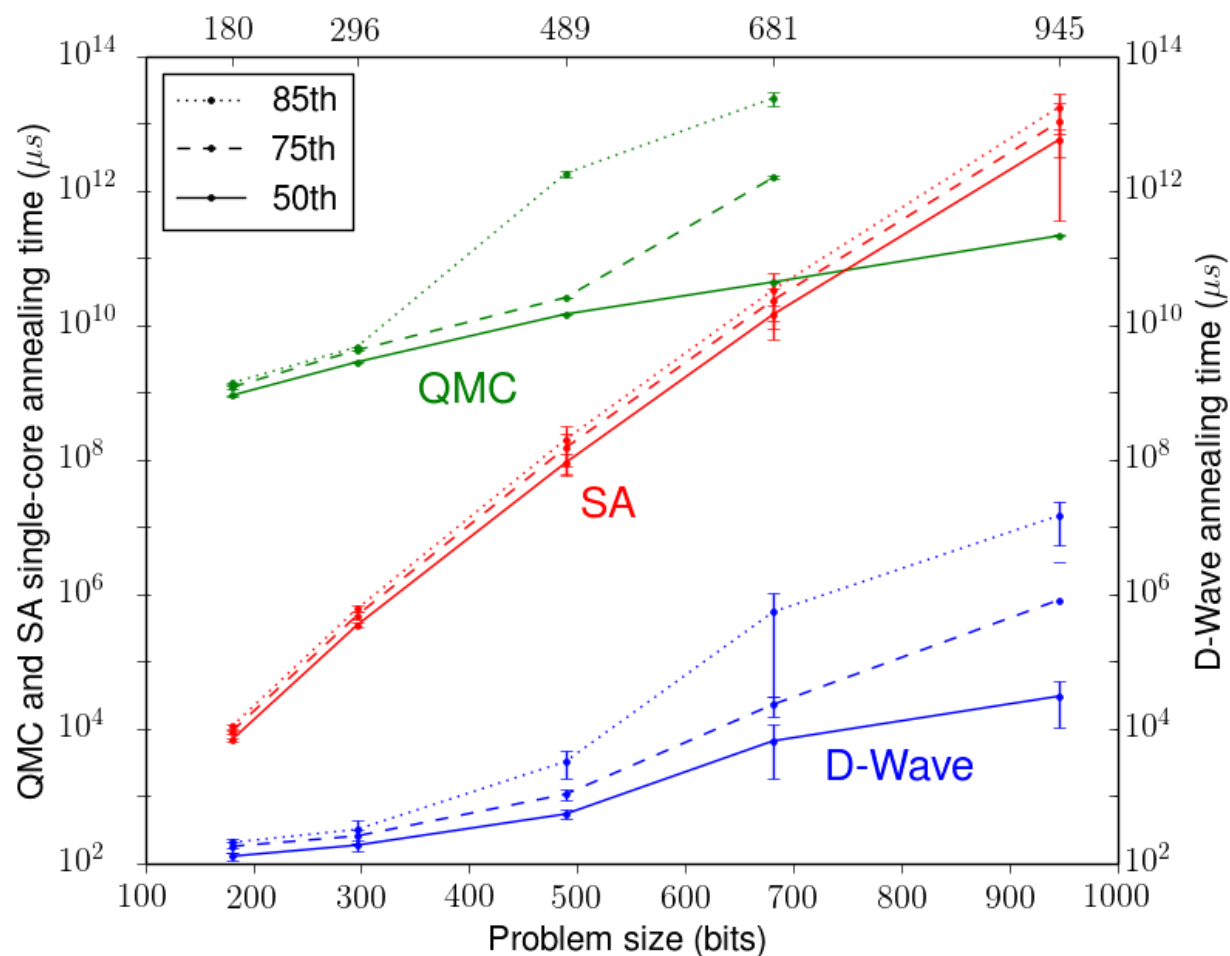
自然計算

自然現象を用いた計算

物理学を基礎とする 計算技術

商用量子アニーリングマシンD-Waveが発表された後

「1億倍高速」と報告したGoogleの発表(2015年12月 arXiv登場)



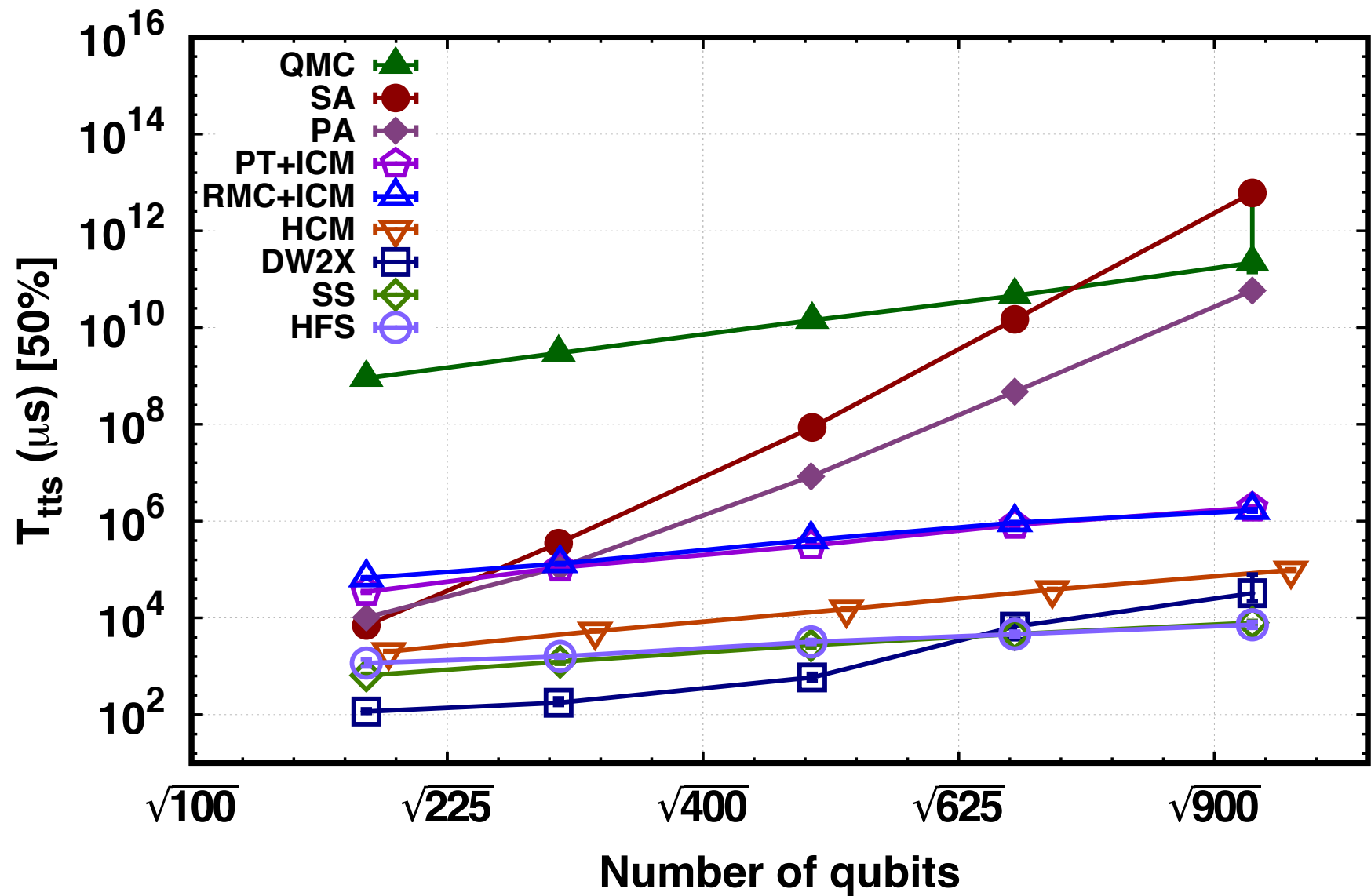
D-Wave が得意とする
組合せ最適化問題での競争

QMCのカーブの傾きと、
D-Waveのカーブの傾きがほぼ同じ

1000量子ビットでの計算
巡回セールスマン問題では、
数都市程度(まだまだ小規模)に相当

V. S. Denchev et al. (Google group), PRX (2016)
<https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevX.6.031015>

商用量子アニーリングマシンD-Waveが発表された後

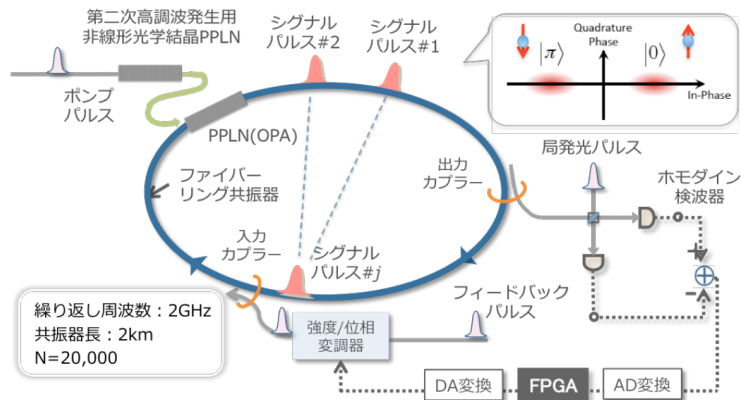


Salvatore Mandrà, Zheng Zhu, Wenlong Wang, Alejandro Perdomo-Ortiz, Helmut G. Katzgraber, Phys. Rev. A 94, 022337 (2016).

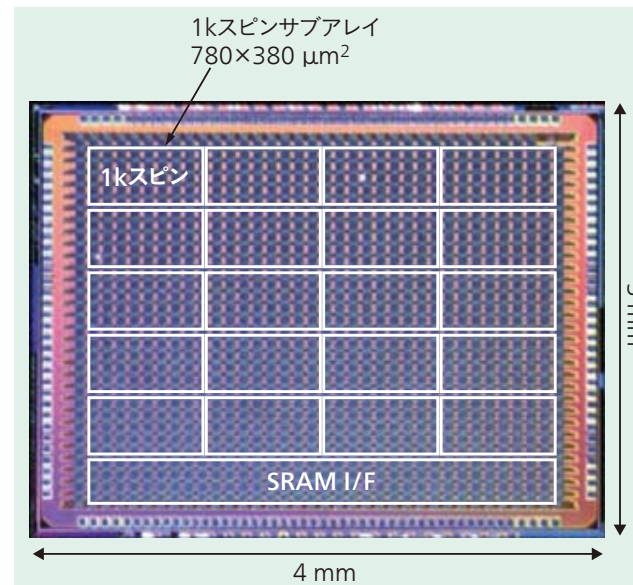
日本発の組合せ最適化専用マシン

新しいタイプの組合せ最適化処理マシンが次々と開発

コヒーレントイジングマシン

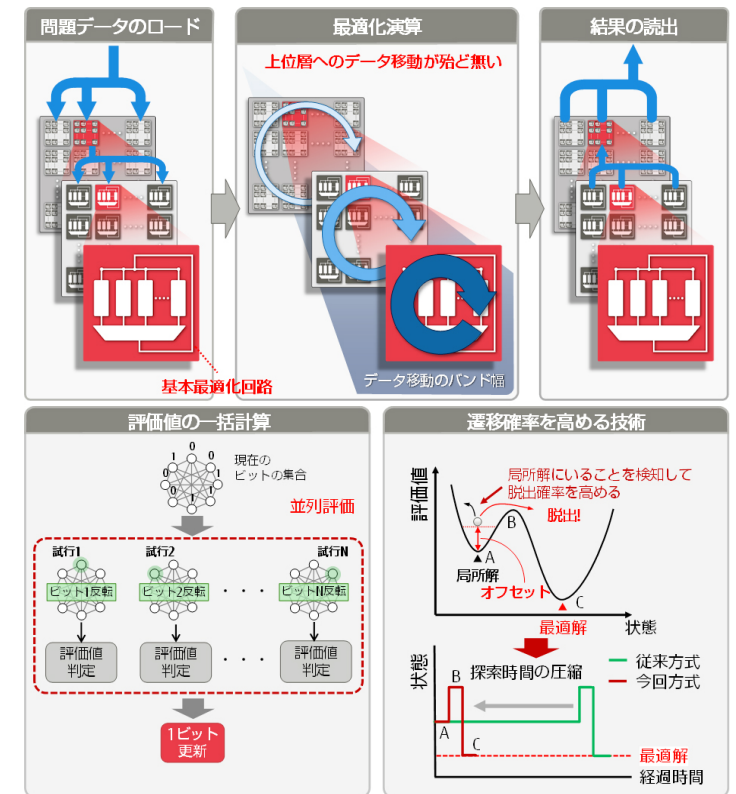


CMOSアニーリングマシン



山岡ほか、
日立評論 Vol. 98, No. 06-07, 406-407,
イノベティブR&Dレポート pp. 84-89 (2015)
http://www.hitachihyoron.com/jp/pdf/2015/06_07/2015_06_07_14.pdf

富士通研究所のマシン



株式会社富士通研究所web サイトより
<http://pr.fujitsu.com/jp/news/2016/10/20-1.html>

国立情報学研究所
山本・宇都宮研究グループ web サイトより
<https://qistokyo.wordpress.com/research/coherent-ising-machine/>

量子アニーリングの未来

量子アニーリングにおける未解決問題・現実的課題

- 古典情報処理に対し、量子アニーリングは優位？
 - 量子アニーリングのキラーアプリケーションは？
 - 各種「ゆらぎ」の類似点と相違点
-
- イジングモデル定式化に要する時間
 - 量子ビットネットワークへの埋込時間

量子アニーリングの研究開発

専用マシン開発

- ・既存マシンの改良
 - 量子ビット数増大
 - コヒーレンス時間向上
 - スケジュール関数のチューニング
- ・多様な量子ゆらぎ導入
 - XX相互作用(量子性強い?)

D-Wave Systems、Google、
IARPA-QEO、NEDO

アプリ

産業界における課題解決

- ・ 組合せ最適化処理の抽出
- ・ 機械学習への適用

リクルートコミュニケーションズ、
Google、フォルクスワーゲン、1QBit、
QxBranch (D-Wave 使用)

デンソー、ブレインパッド、Nextremer

ハード

ソフト

ユーザ支援

- ・ UI整備
- ・ 高速化支援
- ・ コンサルティング

D-Wave Systems、
1QBit、Fixstars

JST STARTプロジェクト (大関先生@東北大)

平成29年8月3日
東京都千代田区四番町5番地3
科学技術振興機構 (JST)

研究成果展開事業 大学発新産業創出プログラム (START) 新規プロジェクトの決定について (平成29年度第1サイクル審査分)

JST (理事長 濱口 道成) は、大学発新産業創出プログラム (START) 「プロジェクト支援型」における平成29年度第1サイクル審査分の新規プロジェクト4件を決定しました (別紙)。

本プログラムは、ベンチャーキャピタルなどの事業化ノウハウを持った人材を「事業プロモーター」として活用し、研究者とともに事業戦略・知財戦略を構築しつつ市場や出口を見据えた研究開発と事業育成を一体的に推進し、ベンチャー企業の設立を目指します (参考1)。

本プログラムでは、まず大学などの研究者から技術シーズの申請を受けます。事業プロモーター (参考2) は応募された技術シーズのうち事業化の可能性がある判断される技術シーズを絞り込み、研究者とともにビジネスモデルを検討します。その後、研究者および事業プロモーターから提案される技術シーズやビジネスモデルなどに対して、外部専門家で構成される委員会にて審査 (事前評価) を実施し、その結果をもとに新規プロジェクトを決定します。委員会の審査は第1サイクルから第3サイクルまで実施する予定ですが、今回は第1サイクル分について審査を行いました。

本年度は平成29年1月17日 (火) から3月15日 (水) まで、第1サイクルの技術シーズ募集を行い、36件の応募がありました。事業プロモーターによる絞り込みと委員会による審査を実施し、4件の新規プロジェクトを決定しました。

今後、契約などの条件が整い次第、研究開発を開始する予定です。

量子アニーリングで加速する最適化技術の実用化	東北大学 大学院情報科学研究科 准教授 大関 真之	ジェネラルパートナー株式会社	本プロジェクトでは、従来のコンピューター・プログラムによる処理では難しかった、「巡回セールスマン問題」に代表される最適化問題を、量子アニーリング技術を応用して、高速に解決する新規のアプリケーションを開発する。最適化問題の課題解決により、社会貢献するベンチャーを設立する。
------------------------	------------------------------------	----------------	---

アプリケーション基礎の様々な例

QBoostを用いた森林検出(NASA)

QBoostについては、下記論文を参照してください。
<http://proceedings.mlr.press/v25/neven12/neven12.pdf>

PLOS ONE

RESEARCH ARTICLE

Deploying a quantum annealing processor to detect tree cover in aerial imagery of California

Edward Boyda^{1,2*}, Saikat Basu³, Sangram Ganguly^{2,4}, Andrew Michaelis^{4,5}, Supratik Mukhopadhyay³, Ramakrishna R. Nemani⁶

1 Department of Physics and Astronomy, Saint Mary's College of California, Moraga, CA, United States of America, 2 Bay Area Environmental Research Institute, Moffett Field, CA, United States of America, 3 Department of Computer Science, Louisiana State University, Baton Rouge, LA, United States of America, 4 Earth Science Division, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA, United States of America, 5 University Corporation at CSU Monterey Bay, Seaside, CA, United States of America, 6 NASA Advanced Supercomputing Division, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA, United States of America

* ekb2@stmarys-ca.edu

Check for updates



Fig 7. Classification of tree cover by boosted linear-plus-quadratic stumps, from the 508-qubit problem. Left: A region of broken tree cover outside the town of Blocksburg, CA. Middle: Saint Mary's College of California. Right: The city of Mill Valley, CA.

doi:10.1371/journal.pone.0172505.g007

E. Boyda et al., PLoS ONE 12(2): e0172505.
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0172505>

アプリケーション基礎の様々な例

D-Waveで行列分解(Los Alamos National Lab.)

Nonnegative/binary matrix factorization with a D-Wave quantum annealer

Daniel O'Malley¹, Velimir V. Vesselinov¹, Boian S. Alexandrov²,
and Ludmil B. Alexandrov³

¹Computational Earth Science (EES-16), Los Alamos National Laboratory

²Physics and Chemistry of Materials (T-1), Los Alamos National Laboratory

³Theoretical Biology and Biophysics (T-6), Los Alamos National Laboratory

Abstract

D-Wave quantum annealers represent a novel computational architecture and have attracted significant interest [1, 2, 3], but have been used for few real-world computations. Machine learning has been identified as an area where quantum annealing may be useful [4, 5, 6]. Here, we show that the D-Wave 2X can be effectively used as part of an unsupervised machine learning method. This method can be used to analyze large datasets. The D-Wave only limits the number of features that can be extracted from the dataset. We apply this method to learn the features from a set of facial images.



Figure 1: Face image reconstruction using features learned by NBMF. The five-by-seven matrix of images on the right shows the features that were learned. The two images on the left show the original image (top) and the reconstruction (bottom). The reconstruction is obtained by summing the features that are boxed in green. Note that although some of the features appear to be all black, they actually contain facial features are small in magnitude (black corresponds to 0, white corresponds to 1).

Daniel O'Malley et al., arXiv:1704.01605

<https://arxiv.org/abs/1704.01605>

アプリケーション基礎の様々な例

D-Waveで行列分解(Los Alamos National Lab.)



メンバー

ついに出了！量子コンピュータD-Waveを使った非負二値行列因子分解

2017/05/12 Tanahashi

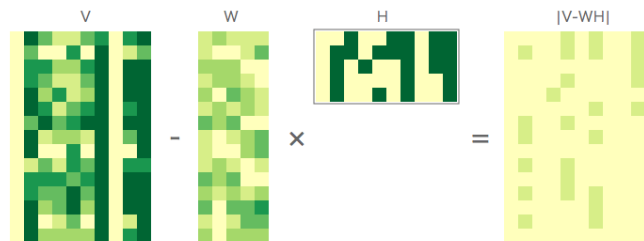
ツイート

26

いいね！

3

ブックマーク



n= 15 m= 10 r= 5 START

アドテックブログ管理者のTanahashiです。本記事では、先日Los Alamos国立研究所(LANL)からArXivに投稿された量子コンピュータD-Waveを用いた非負二値行列因子分解[1]について紹介します。上のデモはこのアルゴリズムをJavaScriptでほぼそのまま実装したものです。アニーリング部分はD-Waveを使う代わりに焼きなまし法で実装しています。LANLは2015年にD-Wave SystemsのD-Wave 2Xを導入しており、アニーリング型量子コンピュータの応用研究を活発に行なっているため、D-Waveユーザとしては是非注目しておきたい研究機関の一つです。

私たちリクルートコミュニケーションズは以前より早稲田大学と量子アニーリングに関する共同研究を進めていましたが、昨年よりD-Wave Systemsと共同研究を開始し、D-Waveを用いた機械学習アルゴリズムの開発やその広告配信への応用に取り組んでいます。また、今年の6月には量子アニーリングに関する世界トップクラスの国際学会 Adiabatic Quantum Computing Conference2017 が日本で行われ、私たちもD-Waveを用いた機械学習アルゴリズムやレコメンデーション手法について発表する予定です。

より詳細には、共同研究を進めているリクルートコミュニケーションズの棚橋氏による、左記の解説が参考になります。

<https://www.rco.recruit.co.jp/career/engineer/blog/dwave03/>

$$W, H = \arg \min_{W, H} \|V - WH\|_F \quad \text{s.t.} \quad W_{ij} \geq 0, H_{ij} \in \{0, 1\}$$

*H*をランダムに初期化

Input : V, k

Output : W, H

Until 収束

// Wに関する最適化

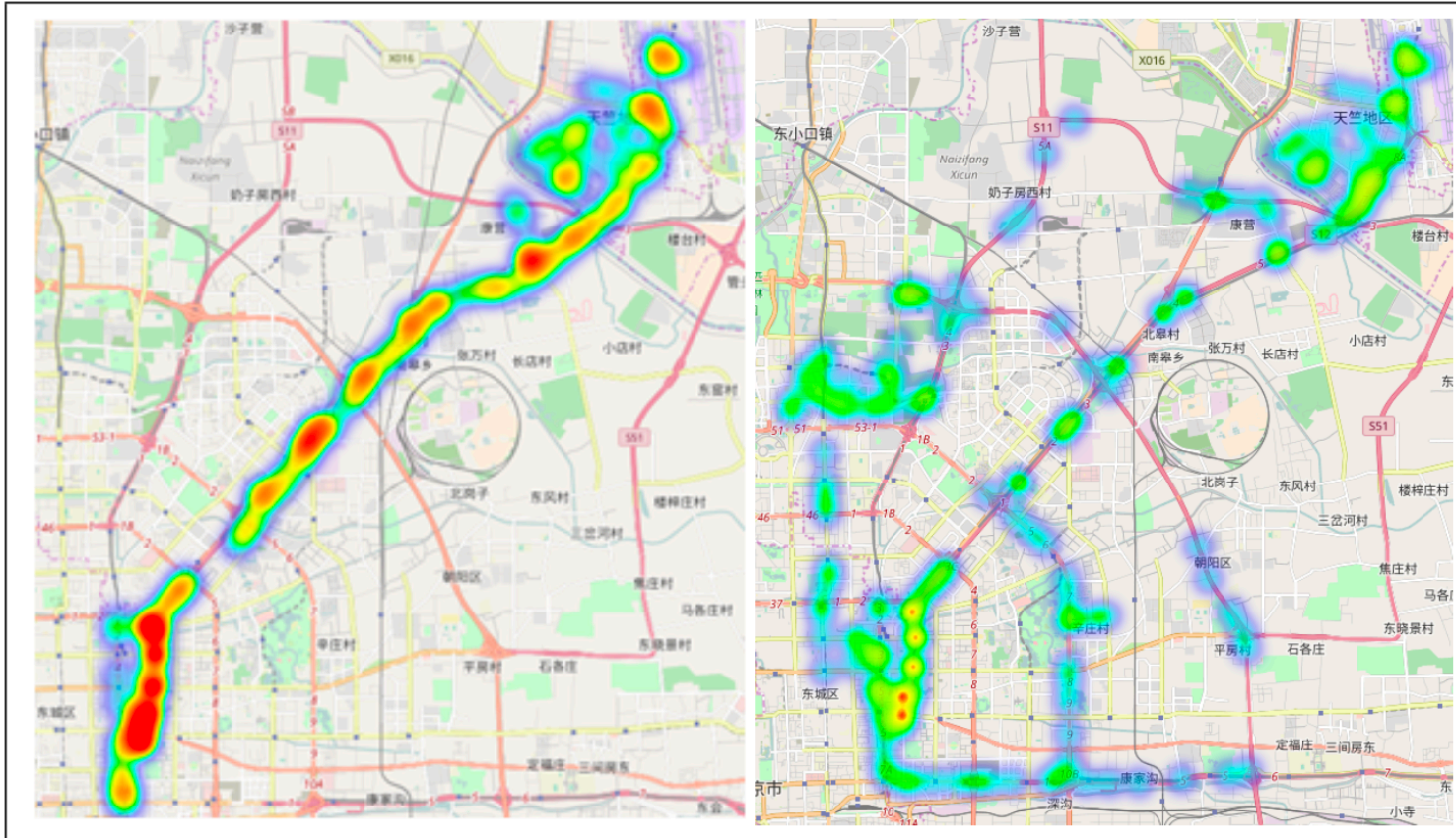
$$W = \arg \min_{X \in R^{+^{n \times r}}} \|V - XH\|_F + \alpha \|X\|_F$$

// D-Waveを使ってHに関する最適化を行う

$$H = \arg \min_{X \in \{0,1\}^{r \times m}} \|V - WX\|_F$$

アプリケーション基礎の様々な例

D-Waveで渋滞回避(Volkswagen)



Traffic flow optimization using a quantum annealer

Florian Neukart^{*1}, David Von Dollen¹, Gabriele Compostella², Christian Seidel²,
Sheir Yarkoni³, and Bob Parney³

¹Volkswagen Group of America, San Francisco, USA

²Volkswagen Data:Lab, Munich, Germany

³D-Wave Systems, Inc., Burnaby, Canada

<https://arxiv.org/pdf/1708.01625.pdf>

私が進める量子アニーリング及び 関連類似技術の研究開発

量子アニーリングの研究開発

専用マシン開発

- ・既存マシンの改良
 - 量子ビット数増大
 - コヒーレンス時間向上
 - スケジュール関数のチューニング
- ・多様な量子ゆらぎ導入
 - XX相互作用(量子性強い?)

D-Wave Systems、Google、
IARPA-QEO、NEDO

アプリ

産業界における課題解決

- ・ 組合せ最適化処理の抽出
- ・ 機械学習への適用

リクルートコミュニケーションズ、
Google、フォルクスワーゲン、1QBit、
QxBranch (D-Wave 使用)

デンソー、ブレインパッド、Nextremer

ハード

ソフト

ユーザ支援

- ・ UI整備
- ・ 高速化支援
- ・ コンサルティング

D-Wave Systems、
1QBit、Fixstars

組合せ最適化処理に向けた革新的アニーリングマシンの研究開発

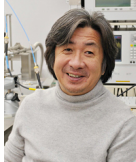
委託予定先	(株)日立製作所、産業技術総合研究所、理化学研究所、情報・システム研究機構、早稲田大学
概要	物流の経路最適化やロボットの動作最適制御など、IoTでのシステムを最適制御するには組合せ最適化問題と呼ばれる問題を解く必要があります。しかし、システムの規模が大きくなると、従来型の計算機では組合せ数が爆発的に増加し答えを求めることが難しくなります。それに対処するため、アニーリングマシンと呼ばれる計算機が提案されています。本プロジェクトでは、CMOSおよび量子アニーリングマシンと呼ばれる2種類のアニーリングマシンについて、実用化に必要な大規模化・高性能化技術の開発に取り組みます。さらに、アニーリングマシンを使用する際に必須となる問題マッピング等の基盤技術の開発を行います。



山岡雅直氏(日立)



川畑史郎氏(産総研)



蔡兆申氏(理研)



河原林健一氏(NII)



小林哲則教授

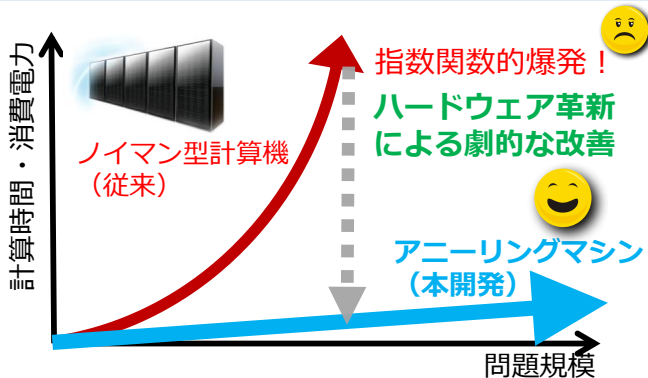
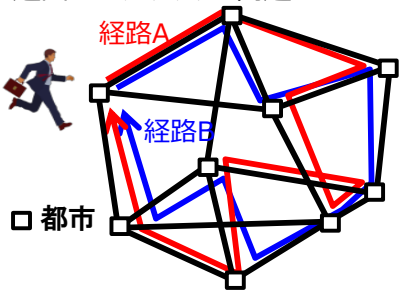


戸川望教授

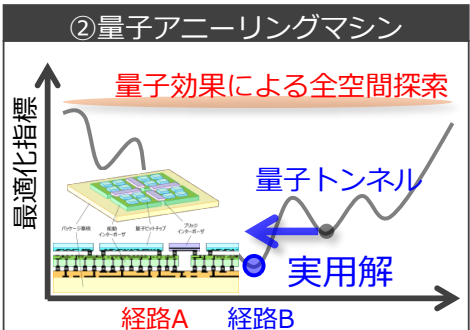
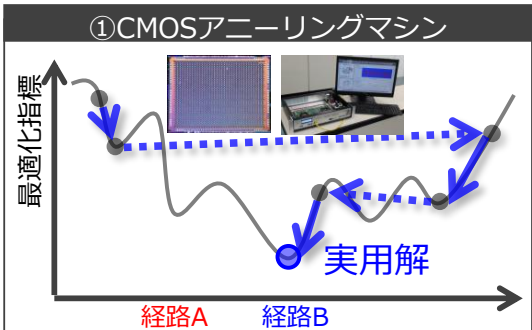


寺田晃太郎
大学院生

組合せ最適化問題の例:
巡回セールスマン問題



日本も、イジング モデル型情報処理 ハードウェア開発 に着手



③共通基盤技術
実際の問題をアニーリングマシンにマッピングする技術、等

2016年7月8日 NEDO プレスリリース
<http://www.nedo.go.jp/content/100790655.pdf>

量子アニーリングを用いたデータ分析で、マーケティング・コミュニケーションを最適化させる

早稲田大学は11月20日、株式会社リクルートコミュニケーションズ[®]（本社所在地：東京都中央区、代表取締役社長：清水 淳 以下、リクルートコミュニケーションズ）と、量子アニーリングによるデータ分析手法の開発を目的とした共同研究契約を締結しました。

共同研究の目的

リクルートコミュニケーションズは、リクルートグループにおいて、顧客の集客ソリューションからWebマーケティング、メディアの制作・宣伝と言ったマーケティング・コミュニケーションを担っています。特に近年は、広告配信の最適化などマーケティングテクノロジーの技術開発にも注力しており、様々な手法の研究を通じてマーケティング効果の最大化を目指してきました。

このたび、量子アニーリングを用いたデータ分析手法の理論構築及びプログラムの実装や、本手法を実データに適用し考察することで、新しい手法の確立を行い、量子アニーリングの産業への応用を実現することで、マーケティング・コミュニケーションのさらなる最適化を目指します。

共同研究におけるそれぞれの役割

本共同研究において、早稲田大学は、本研究に必要なとなる理論の構築を行います。研究は早稲田大学高等研究所[®]（研究担当者：高等研究所田中宗助教[®]）が担当します。

また、リクルートコミュニケーションズと早稲田大学が共同して、新手法によるデータ分析の実施、分析結果の評価、検討等を行います。

Tags

ビジネス, 技術, 研究活動

Posted

Wed, 25 Nov 2015

ツイート

Like Share

G+ G+ 共有

メールで送信

早稲田大学とリクルートコミュニケーションズの共同研究 (2015年11月～)

<http://www.waseda.jp/top/news/35050>

量子アニーリングを用いた人工知能の共同研究を開始

早稲田大学高等研究所と人工知能ベンチャーのNextremerが 量子アニーリングを用いた人工知能の共同研究を開始

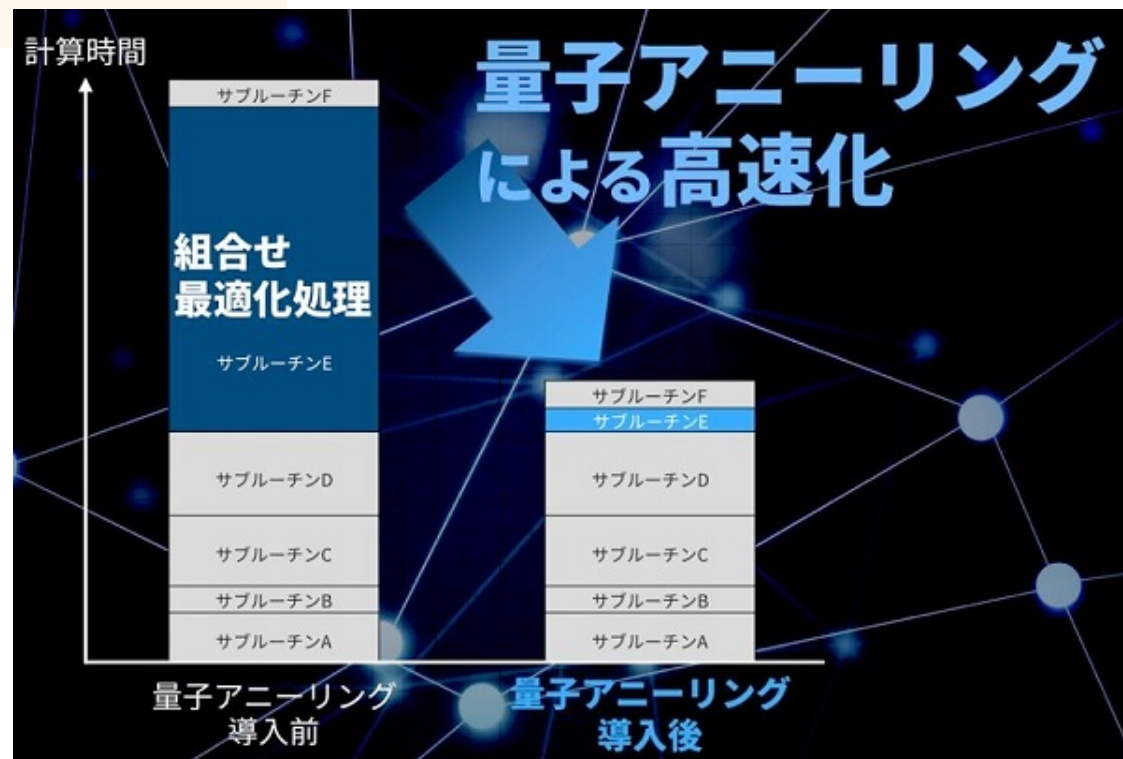
早稲田大学高等研究所^①（所長：宮島英昭（みやじまひであき）商学学院教授）は、人工知能テクノロジーを用いた対話システム開発を手掛ける株式会社Nextremer^②（代表取締役：向井永浩、以下「Nextremer」）と、量子アニーリング^{*}を用いた人工知能ソフトウェア開発を目的とした共同研究契約を、11月16日に締結しました。

共同研究概要

この度の共同研究は、近年確立されつつある量子アニーリング手法を応用したもので、先端的な人工知能の基礎技術研究の取り組みです。研究は、Nextremerが、アプリケーション開発及びシミュレーション計算を担当し、早稲田大学は技術支援のほか、量子アニーリングの計算適用検討等を担当します。早稲田大学高等研究所では、統計物理学の知見と大規模数値計算の手法を活かし、量子アニーリングをはじめとしたイジングモデル型情報処理の理論研究及び、実問題への応用展開に取り組む田中宗（たなかしゅう）助教^③が担当します。

研究内容：

- ◆（１）対話システムへの応用を目的とする、量子アニーリングを用いた個人の選択の予測
- ◆（２）量子アニーリングを用いた深層学習など機械学習の高速化・リソースの削減



早稲田大学とNextremerの共同研究 (2016年11月～)

<http://www.waseda.jp/top/news/46400>

組合せ最適化処理の高速化に関する共同研究を開始

量子コンピューティング周辺技術の普及に寄与

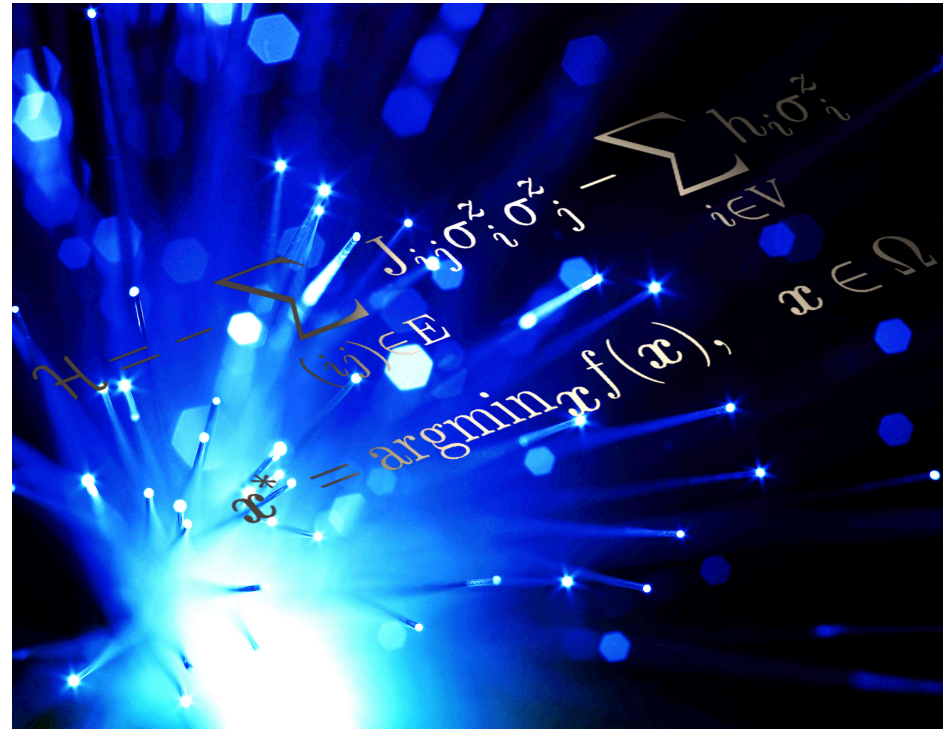
9月26日、早稲田大学高等研究所[○]（所在地：東京都新宿区、所長：宮島 英昭）と株式会社フィックスターズ[○]（本社：東京都品川区、代表取締役社長：三木 聡、以下フィックスターズ）は、イジングモデル型情報処理デバイスの高速化に関する理論的研究を目的とした共同研究契約を締結いたしました。

イジングモデルは統計力学模型の一種であり、膨大な選択肢からベストな選択肢を探索する「組合せ最適化問題¹⁾」に対する手法として広く利用されています。近年、イジングモデルをハードウェア上に実装し「組合せ最適化問題」を高速に処理する試みが広まりつつあり、D-Wave Systems Inc. が開発、販売を手掛ける量子アニーリングマシンをはじめとして、商用化も進んでいます。

フィックスターズは、半導体アーキテクチャの構造に合わせた最適化や並列化等に強みを持ち、GPUやFPGAといったアクセラレータを活かした高速化を、その登場間もない頃から提供してきました。加えて、世界に先駆けて量子アニーリングマシンの商用化を実現したD-Wave Systems Inc. と協業し、量子コンピューティングの導入支援等を開始しています。

本研究においてフィックスターズが、量子アニーリングマシンをはじめとするイジングモデル型デバイスを実問題に利用し、アーキテクチャを意識した高速化の検討に取り組みます。また、早稲田大学高等研究所においては、統計物理学の知見と大規模数値計算の手法を活かし、イジングモデル型情報処理の理論研究及び実用化に豊富な実績を持つ、早稲田大学高等研究所の田中宗准教授[○]（科学技術振興機構さがけ研究者を兼任）が担当し、当該研究における指導及び理論構築を行います。

註1：膨大な選択肢からベストな選択肢を探索する問題。「巡回セールスマン問題」を例にとると、複数の経由地を通る最短経路を探索する際、候補となる途中経路の組み合わせの数が爆発的に増えてしまう、いわゆる計算量爆発を引き起こす問題である。組合せ最適化問題は様々な産業において内在するため、高速化、高精度化を可能にする技術が求められている。



早稲田大学とフィックスターズの共同研究 (2017年9月～)

<https://www.waseda.jp/top/news/53975>

世界的国際会議AQC2017における発表

カテゴリ	内容	共同研究先企業・研究機関
アドテク 特徴量選択	QAを用いた特徴量選択	リクルートコミュニケーションズ
アドテク 広告配信最適化	QAを用いた広告配信最適化	リクルートコミュニケーションズ
アドテク 情報推薦	QAを用いた情報推薦	リクルートライフスタイル リクルートコミュニケーションズ
自動車関連 最適化	断熱定理の観点から見たQA性能再検討	デンソー、東北大学
物流関連 配送最適化	物流最適化問題に対するQAの性能評価	ブレインパッド
人工知能	自己組織化マップに対するQAの適用法	Nextremer
データ分類	クラスタリングに対するQAの性能評価	物質・材料研究機構
データ分析	特異値分解に対するQAの性能評価	東京理科大学、物質・材料研究機構
スパコン利用	PEZY-SCを用いたQMCによるQAの性能評価	PEZY、MDR、物質・材料研究機構
理論	相転移制御によるQAの性能向上	東北大学

量子アニーリングの研究開発

専用マシン開発

- ・既存マシンの改良
 - 量子ビット数増大
 - コヒーレンス時間向上
 - スケジュール関数のチューニング
- ・多様な量子ゆらぎ導入
 - XX相互作用(量子性強い?)

D-Wave Systems、Google、
IARPA-QEO、NEDO

アプリ

産業界における課題解決

- ・ 組合せ最適化処理の抽出
- ・ 機械学習への適用

リクルートコミュニケーションズ、
Google、フォルクスワーゲン、1QBit、
QxBranch (D-Wave 使用)

デンソー、ブレインパッド、Nextremer

ハード

ソフト

ユーザ支援

- ・ UI整備
- ・ 高速化支援
- ・ コンサルティング

D-Wave Systems、
1QBit、Fixstars

本日の話題

量子アニーリングは、何に使えるのか？

量子アニーリングとは、何か？

量子アニーリングの過去、現在、未来

量子アニーリングの 研究開発最前線

田中 宗

早稲田大学高等研究所

科学技術振興機構 戦略的創造研究推進事業 さきがけ
「量子の状態制御と機能化」領域 研究者



WIAS

QUANTUM
ANNEALING



MACHINE
LEARNING



付録

組合せ最適化問題の分類

- 制約条件がない場合

ランダムスピン系の基底状態探索、数分割問題

- 制約等式がある場合

グラフ分割問題、巡回セールスマン問題

- 制約不等式がある場合

ナップサック問題

数分割問題

- N 個の正の数の集合 $S = \{n_1, \dots, n_N\}$ が与えられている。
- 2つの部分集合 $A, S - A$ に分割する。

[NP困難問題] 各部分集合の和の違いが最も小さくなるような分割方法を求めよ。

[NP完全問題] 各部分集合の和が等しい分割方法は存在するか？

$$\mathcal{H} = \left(\sum_{i=1}^N n_i s_i \right)^2 \quad s_i = \pm 1$$

の基底状態は？

[NP困難問題]

の基底状態エネルギーが0か否か？ [NP完全問題]

例) 4個の正の数の集合 $S = \{1, 2, 3, 6\}$ が与えられたとする。 $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 6$

答え： $\{1, 2, 3\}$ と $\{6\}$ に分ければよい。 → 下記の何れかの場合に最低エネルギー0

$$s_1 = +1, s_2 = +1, s_3 = +1, s_4 = -1$$

$$s_1 = -1, s_2 = -1, s_3 = -1, s_4 = +1$$

数分割問題

- N 個の正の数の集合 $S = \{n_1, \dots, n_N\}$ が与えられている。
- 2つの部分集合 $A, S - A$ に分割する。

[NP困難問題] 各部分集合の和の違いが最も小さくなるような分割方法を求めよ。

[NP完全問題] 各部分集合の和が等しい分割方法は存在するか？

$$\mathcal{H} = \left(\sum_{i=1}^N n_i s_i \right)^2 \quad s_i = \pm 1$$

の基底状態は？

[NP困難問題]

の基底状態エネルギーが0か否か？ [NP完全問題]

例) 4個の正の数の集合 $S = \{1, 2, 3, 5\}$ が与えられたとする。 $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 5$

答え：{1,2,3} と {5} に分ければよい。 → 下記の何れかの場合に最低エネルギー1

$$s_1 = +1, s_2 = +1, s_3 = +1, s_4 = -1$$

$$s_1 = -1, s_2 = -1, s_3 = -1, s_4 = +1$$

グラフ分割問題

- 無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられている。
- 頂点数 $N = |V|$ は偶数とする。
- [制約等式] 等しい頂点数を持つ、互いに重ならない2つの部分グラフに分割する。

[NP困難問題] 2つの部分グラフをつなぐエッジの数を最小にする分割方法を求めよ。

[NP完全問題] 2つの部分グラフをつなぐエッジの数が k 本未満の場合が存在するか？

$$\mathcal{H} = A \left(\sum_{i \in V} s_i \right)^2 + B \sum_{(i,j) \in E} \frac{1 - s_i s_j}{2} \quad s_i = \pm 1$$

制約等式を
満たす場合に0



$A > 0$ とすれば
制約等式を満たす
場合に安定

- 同じ部分グラフ内は0
- 異なる部分グラフ間は1

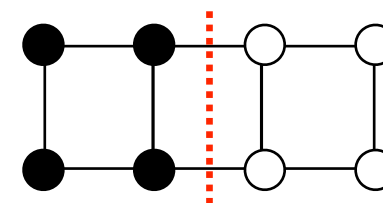
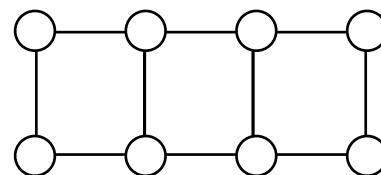


$B > 0$ とすれば
部分グラフ間をつなぐ
エッジの数が小さい
場合に安定

の基底状態は？

[NP困難問題]

の基底状態は上記条件をみたすか？ [NP完全問題]



巡回セールスマン問題

- 無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられている。
- 頂点 $i \in V, j \in V$ を結ぶ辺には、重み ℓ_{ij} が対応する。
- 全ての頂点を通過する経路を考える。
- [制約等式] 各頂点は1回のみ通過。
- [制約等式] 各時間ステップで1つの場所に存在。

[NP困難問題] 通過する経路の重みの和が最小になる経路を求めよ。

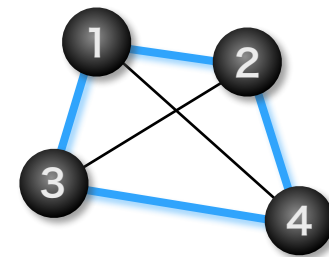
[NP完全問題] 通過する経路の重みの和が $\mathcal{L}$ 未満になる経路は存在するか？

$$L = \sum_{a=1}^N \underbrace{\ell_{c_a, c_{a+1}}}_{\text{都市 } c_a \text{ と都市 } c_{a+1} \text{ の距離}}$$

を最小にする経路を求めよ。

c_a : a番目に訪ねる都市

$c_{N+1}=c_1$: 巡回条件



イジングモデルの形とは異なる

巡回セールスマン問題

- 無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられている。
- 頂点 $i \in V, j \in V$ を結ぶ辺には、重み ℓ_{ij} が対応する。
- 全ての頂点を通過する経路を考える。
- [制約等式] 各頂点は1回のみ通過。
- [制約等式] 各時間ステップで1つの場所に存在。

[NP困難問題] 通過する経路の重みの和が最小になる経路を求めよ。

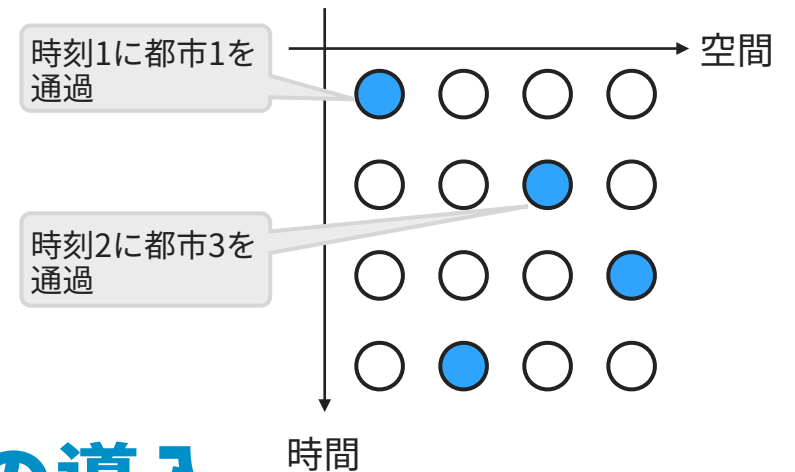
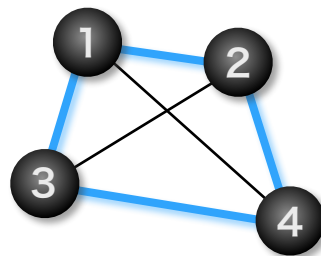
[NP完全問題] 通過する経路の重みの和が $\mathcal{L}$ 未満になる経路は存在するか？

$$L = \sum_{a=1}^N \underline{\underline{\ell_{c_a, c_{a+1}}}}$$

都市 c_a と都市 c_{a+1} の距離

c_a : a番目に訪ねる都市

$c_{N+1}=c_1$: 巡回条件



ビット表現の導入

巡回セールスマン問題

- 無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられている。
- 頂点 $i \in V, j \in V$ を結ぶ辺には、重み ℓ_{ij} が対応する。
- 全ての頂点を通過する経路を考える。
- [制約等式] 各頂点は1回のみ通過。
- [制約等式] 各時間ステップで1つの場所に存在。

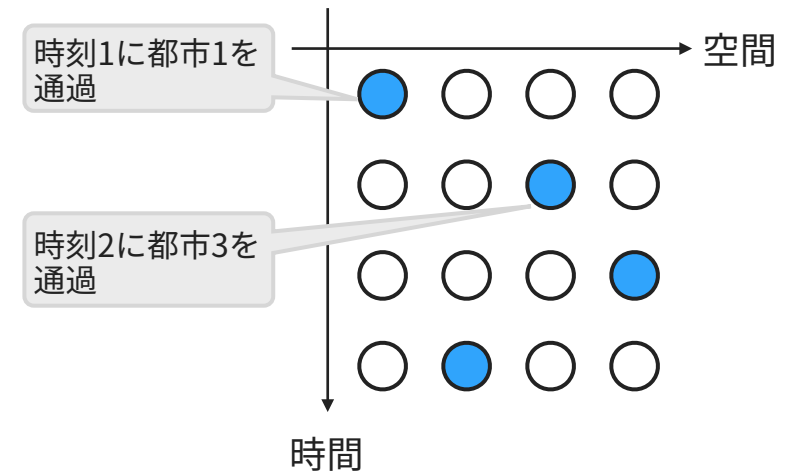
[NP困難問題] 通過する経路の重みの和が最小になる経路を求めよ。

[NP完全問題] 通過する経路の重みの和が $\mathcal{L}$ 未満になる経路は存在するか？

$$L = \sum_{a=1}^N \ell_{c_a, c_{a+1}} = \sum_{a=1}^N \sum_{i,j} \ell_{i,j} n_{i,a} n_{j,a+1}$$

$$n_{i,a} = 0, 1$$

$n_{i,a}=1$: a 番目に都市 i を訪問



巡回セールスマン問題

- 無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられている。
- 頂点 $i \in V, j \in V$ を結ぶ辺には、重み ℓ_{ij} が対応する。
- 全ての頂点を通過する経路を考える。
- [制約等式] 各頂点は1回のみ通過。
- [制約等式] 各時間ステップで1つの場所に存在。

[NP困難問題] 通過する経路の重みの和が最小になる経路を求めよ。

[NP完全問題] 通過する経路の重みの和が $\mathcal{L}$ 未満になる経路は存在するか？

$$L = \sum_{a=1}^N \sum_{i,j} \ell_{i,j} n_{i,a} n_{j,a+1} = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^N \sum_{i,j} \left(\ell_{i,j} \sigma_{i,a}^z \sigma_{j,a+1}^z + \ell_{i,j} \sigma_{i,a}^z + \ell_{i,j} \sigma_{j,a+1}^z + \ell_{i,j} \right)$$

$$n_{i,a} = 0, 1$$

$$\sigma_{i,a}^z := 2n_{i,a} - 1 (= \pm 1)$$

巡回セールスマン問題

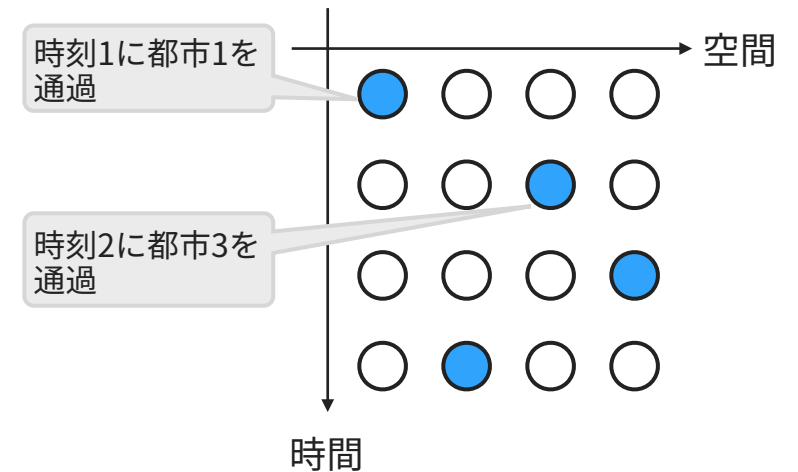
- 無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられている。
- 頂点 $i \in V, j \in V$ を結ぶ辺には、重み ℓ_{ij} が対応する。
- 全ての頂点を通過する経路を考える。
- [制約等式] 各頂点は1回のみ通過。
- [制約等式] 各時間ステップで1つの場所に存在。

[NP困難問題] 通過する経路の重みの和が最小になる経路を求めよ。

[NP完全問題] 通過する経路の重みの和が $\mathcal{L}$ 未満になる経路は存在するか？

$$\sum_{a=1}^N n_{i,a} = 1 \quad (\forall i) \quad \text{各頂点は1回のみ通過}$$

$$\sum_{i=1}^N n_{i,a} = 1 \quad (\forall a) \quad \text{各時間ステップで1つの場所に存在}$$



巡回セールスマン問題

- 無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられている。
- 頂点 $i \in V, j \in V$ を結ぶ辺には、重み ℓ_{ij} が対応する。
- 全ての頂点を通過する経路を考える。
- [制約等式] 各頂点は1回のみ通過。
- [制約等式] 各時間ステップで1つの場所に存在。

[NP困難問題] 通過する経路の重みの和が最小になる経路を求めよ。

[NP完全問題] 通過する経路の重みの和が $\mathcal{L}$ 未満になる経路は存在するか？

$$\mathcal{H} = L + \gamma \left(1 - \sum_{a=1}^N n_{i,a} \right)^2 + \gamma \left(1 - \sum_{i=1}^N n_{i,a} \right)^2$$

$$L = \sum_{a=1}^N \sum_{i,j} \ell_{i,j} n_{i,a} n_{j,a+1} = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^N \sum_{i,j} (\ell_{i,j} \sigma_{i,a}^z \sigma_{j,a+1}^z + \ell_{i,j} \sigma_{i,a}^z + \ell_{i,j} \sigma_{j,a+1}^z + \ell_{i,j})$$

巡回セールスマン問題

- 無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられている。
- 頂点 $i \in V, j \in V$ を結ぶ辺には、重み ℓ_{ij} が対応する。
- 全ての頂点を通過する経路を考える。
- [制約等式] 各頂点は1回のみ通過。
- [制約等式] 各時間ステップで1つの場所に存在。

[NP困難問題] 通過する経路の重みの和が最小になる経路を求めよ。

[NP完全問題] 通過する経路の重みの和が $\mathcal{L}$ 未満になる経路は存在するか？

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{4} \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \sigma_{i,a}^z \sigma_{j,a+1}^z + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \ell_{ij} \sigma_{i,a}^z \\ & + \frac{\gamma}{4} \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{i,a}^z \sigma_{j,a}^z + \frac{\gamma}{4} \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N \sum_{i=1}^N \sigma_{i,a}^z \sigma_{i,b}^z + \gamma(N-2) \sum_{a=1}^N \sum_{i=1}^N \sigma_{i,a}^z \end{aligned}$$

ナップサック問題

- N 個のアイテムリストが与えられている。
- 各々のアイテムの価値を C_i 、重さを w_i とする。
- 価値 C を高くする組合せを探す。
- [制約不等式] 選ばれたアイテムの総重量 $\mathcal{W}$ が W を超えてはならない。

$$C = \sum_{i=1}^N c_i x_i \quad \text{選ばれたアイテムの総価値}$$

$$\mathcal{W} = \sum_{i=1}^N w_i x_i \quad \text{選ばれたアイテムの総重量}$$

ナップサック問題

- N個のアイテムリストが与えられている。
- 各々のアイテムの価値を C_i 、重さを w_i とする。
- 価値 C を高くする組合せを探す。
- [制約不等式] 選ばれたアイテムの総重量 $\mathcal{W}$ が W を超えてはならない。

$$\mathcal{H} = A \left(1 - \sum_{w=1}^W y_w \right)^2 + A \left(\sum_{w=1}^W w y_w - \sum_{i=1}^N w_i x_i \right)^2 - B \sum_{i=1}^N c_i x_i$$

$$x_i = 0, 1$$

$x_i = 1$: アイテム i を選択

制約不等式を満たす場合にゼロ、 $A > 0$ のとき、制約不等式を満たす解が安定

$$y_w = 0, 1$$

$y_w = 1$: $\mathcal{W} = w$ のとき
 $y_w = 0$: それ以外

選ばれたアイテムの総価値

$B > 0$ のとき、総価値が大きい解が安定

先ほどと同様、 $\{0, 1\}$ 変数を $\{-1, 1\}$ 変数にする変換を施し、
イジングモデルの形に変形可能(詳細な計算は省略)

対数トリックを用いるとビット数を減らすことが可能

組合せ最適化問題の分類

- 制約条件がない場合

ランダムスピン系の基底状態探索、数分割問題

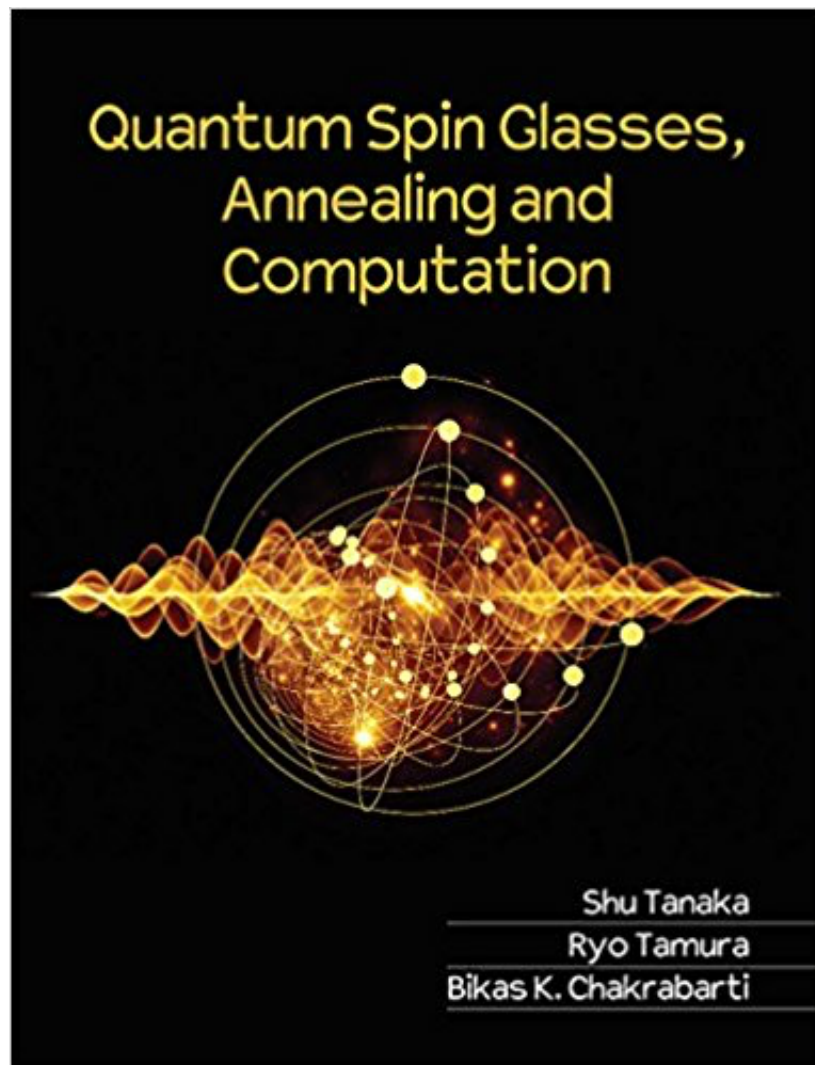
- 制約等式がある場合

グラフ分割問題、巡回セールスマン問題

- 制約不等式がある場合

ナップサック問題

参考文献



Shu Tanaka, Ryo Tamura, and Bikas K. Chakrabarti,
“Quantum Spin Glasses, Annealing and
Computation” (Cambridge University Press, 2017)

frontiers in
PHYSICS

REVIEW ARTICLE
published: 12 February 2014
doi: 10.3389/fphy.2014.00005



Ising formulations of many NP problems

Andrew Lucas *

Lyman Laboratory of Physics, Department of Physics, Harvard University, Cambridge, MA, USA

Edited by:

Jacob Biamonte, ISI Foundation, Italy

Reviewed by:

*Mauro Faccin, ISI Foundation, Italy
Ryan Babbush, Harvard University, USA*

Bryan A. O’Gorman, NASA, USA

***Correspondence:**

*Andrew Lucas, Lyman Laboratory of
Physics, Department of Physics,
Harvard University, 17 Oxford St.,
Cambridge, MA 02138, USA
e-mail: lucas@fas.harvard.edu*

We provide Ising formulations for many NP-complete and NP-hard problems, including all of Karp’s 21 NP-complete problems. This collects and extends mappings to the Ising model from partitioning, covering, and satisfiability. In each case, the required number of spins is at most cubic in the size of the problem. This work may be useful in designing adiabatic quantum optimization algorithms.

Keywords: spin glasses, complexity theory, adiabatic quantum computation, NP, algorithms